



UOM2 : Intelligence Artificielle

Le calcul du premier ordre

Philippe Lamarre

Faculté des Sciences et Techniques de Nantes

Grands principes.

- ⑥ S'intéresse au VRAI et au FAUX.
- ⑥ S'intéresse aux individus, à leur propriétés
- ⑥ La valeur de vérité d'une formule dépend uniquement de ses composants (propositions et connecteurs) et uniquement de cela.

Langage.

- ⑥ Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des variables.
- ⑥ Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des constantes.
- ⑥ Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions.
- ⑥ Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des relations ou prédicats.

Langage.

Définition 1 *Un termes du langage du premier ordre est*

- ⑥ *une variable, ou*
- ⑥ *un élément de l'algèbre $M(\mathcal{F} \cup \mathcal{C})$ obtenue à partir de $\mathcal{F} \cup \mathcal{C}$.*

Définition 2 *L'ensemble des formules atomiques est une forme prédicative : $\{R(t_1, t_2, \dots, t_n) : t_1, t_2, \dots, t_n \text{ sont des termes, } R \in \mathcal{R}\}$, ou*

Il est possible d'ajouter l'égalité entre termes ($t_1 = t_2$) à la définition des formules atomiques pour généraliser le langage.

Définition 3 *L'ensemble des formules est :*

- ⑥ *une formule atomique*
- ⑥ *si α et β sont des formules alors, $\neg(\alpha)$ et $(\alpha \vee \beta)$ sont des formules.*
- ⑥ *Si α est une formule et x une variable ($x \in \mathcal{V}$), alors $\forall x \alpha$ est une formule.*
- ⑥ *Toute formule bien formée s'obtient à partir des règles précédentes.*

L'occurrence d'une variable x d'une formule f est liée si elle se trouve dans la portée d'un quantificateur $\forall x$, si non, elle est dite libre.

Langage.

$$\alpha \rightarrow \beta =_{Def} \neg(\alpha \vee \beta)$$

$$\alpha \wedge \beta =_{Def} \neg((\neg\alpha) \vee (\neg\beta))$$

...

$$\exists x(\alpha) =_{Def} \neg(\forall x(\neg(\alpha)))$$

Comme pour le calcul propositionnel, les parenthèses sont quelques-fois omises ou remplacées par des accolades ou des crochets....

Axiomatique et déduction formelle.

Axiomes

A1 $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

A2 $((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)))$

A3 $((\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha))$

A4 $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \forall x\beta)$

x ne figure pas dans α et n'est pas liée dans β .

A5 $(\forall x\alpha \rightarrow \alpha_{[t/x]})$

x est libre pour tout t dans α

Axiomatique et déduction formelle.

Règles d'inférences

$$\mathbf{MP} \quad \frac{\vdash \alpha \quad \vdash \alpha \rightarrow \beta}{\vdash \beta}$$

$$\mathbf{G} \quad \frac{\vdash \alpha}{\vdash \forall x \alpha}$$

x n'est pas liée dans α

Axiomatique et déduction formelle.

Pour obtenir l'égalité, rajouter

A6 $\forall x(x = x)$

A7 $(x = y) \rightarrow (\alpha[z/x] \rightarrow \alpha[y/x])$, où α est une formule atomique.

Interprétations

Définition 4 Une interprétation I est un triplet $\langle \mathcal{D}, I_c, I_v \rangle$ ayant les propriétés suivantes :

- ⑥ $\mathcal{D}$ est un ensemble non vide : le domaine d'interprétation.
- ⑥ I_c est une fonction qui associe à toute constante fonctionnelle f à n places à une fonction $I_c(f)$ de $\mathcal{D}^n$ dans $\mathcal{D}$, et qui associe à toute constante prédicative P à m places une fonction $I_c(P)$ de $\mathcal{D}^m$ dans $\{V, F\}$.
- ⑥ I_v est une fonction qui associe à toute variable un élément de $\mathcal{D}$.

Interprétations

Définition 5 Règles d'interprétation des formules :

- ⑥ Si x est une variable libre, alors, $I(x) =_{Def} I_v(x)$.
- ⑥ Si f est une constante fonctionnelle et si $t_1 \dots t_n$ sont des termes, alors
$$I(f(t_1, \dots, t_n)) =_{Def} (I_c(f))(I_c(t_1), \dots, I_c(t_n))$$
- ⑥ Si P est une constante prédicative à m places et si $t_1 \dots t_m$ sont des termes, alors,
$$I(P(t_1, \dots, t_m)) =_{Def} (I_c(P))(I_c(t_1), \dots, I_c(t_m))$$
- ⑥ Si s et t sont des termes alors $I(s = t)$ est V si $I(s)I(t)$, et F si non.

Interprétations

Définition 6 Règles d'interprétation des formules :

- ⑥ Les autres formules utilisant des opérateurs logiques s'interprètent comme dans le calcul des propositions.

Interprétations

Définition 7 Règles d'interprétation des formules :

- ⑥ Si α est une formule et x une variable alors $I(\forall x\alpha)$ est V ssi $I_{[d/x]}(\alpha)$ est V pour tout élément de $\mathcal{D}$.
- ⑥ Si α est une formule et x une variable alors $I(\exists x\alpha)$ est V ssi $I_{[d/x]}(\alpha)$ est V pour au moins un élément d de $\mathcal{D}$.

Méthodes de déduction automatique

Une théorie est décidable s'il existe un algorithme permettant de décider, en un temps fini, si une formule α est un théorème, ou la négation d'un théorème, ou encore, ni l'un ni l'autre.

Le calcul du premier ordre n'est pas décidable → restriction à des sous-parties du langage.

Bilan



- ⑥ non décidable.
- ⑥ Pouvoir d'expression puissant, mais tout n'est pas présent.

La suite

- ⑥ Paradoxes et limites de la logique classique
- ⑥ Les systèmes experts.
- ⑥ Les logiques modales.