UOM2 : Intelligence Artificielle

Le calcul Propositionnel

Philippe Lamarre

Faculté des Sciences et Techniques de Nantes

Grands principes.

- S'intéresse au VRAI et au FAUX.
- Concentré sur la valeur de vérité des propositions sans considérer la manière dont elles sont construites.
- La valeur de vérité d'une formule dépend uniquement de ses composants (propositions et connecteurs) et uniquement de cela.

Le langage.

- Soit Var l'ensemble dénombrable des **variables propositionnelles.**

Le langage.

- Soit Var l'ensemble dénombrable des **variables propositionnelles.**
- Définition des **formules bien formées** (**WFF**)
  - si $p \in Var$ alors p est une formule
  - si α et β sont des formules alors (α), $\neg\alpha$, $\alpha \wedge \beta$ sont des formules
  - Toute formule bien formée s'obtient à partir des règles précédentes et uniquement celles-ci.

Le langage.

- Soit Var l'ensemble dénombrable des **variables propositionnelles.**
- Définition des **formules bien formées** (**WFF**)
  - si $p \in Var$ alors p est une formule
  - si α et β sont des formules alors (α), $\neg\alpha$, $\alpha \wedge \beta$ sont des formules
  - Toute formule bien formée s'obtient à partir des règles précédentes et uniquement celles-ci.

Les autres symboles sont introduits par définition :
$\alpha \vee \beta \equiv_{Def} \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$, $\alpha \rightarrow \beta \equiv_{Def} \neg\alpha \vee \beta$,
$\alpha \leftrightarrow \beta \equiv_{Def} (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha) \ldots$

L'axiomatique.

Il existe plusieurs axiomatiques du calcul propositionnel.
En voici une.

L'axiomatique.

Il existe plusieurs axiomatiques du calcul propositionnel. En voici une.

- Axiomes

  A1 $(\alpha \vee \alpha) \rightarrow \alpha$

  A2 $\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$

  A3 $(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\beta \vee \alpha)$

  A4 $(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \vee \alpha) \rightarrow (\gamma \vee \alpha))$

L'axiomatique.

Il existe plusieurs axiomatiques du calcul propositionnel. En voici une.

- Axiomes

  A1 $(\alpha \vee \alpha) \rightarrow \alpha$

  A2 $\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$

  A3 $(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\beta \vee \alpha)$

  A4 $(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \vee \alpha) \rightarrow (\gamma \vee \alpha))$

- Règles d'Inférence

  MP $\frac{\vdash \alpha \ \vdash \alpha \rightarrow \beta}{\vdash \beta}$

  SU Si α est un théorème, alors toute formule obtenue à partir de α par substitution uniforme est aussi un théorème.

L'axiomatique.

Notation : $\vdash \alpha$ signifie que α est un **théorème** (i.e. peut être obtenu à partir des axiomes et des règles d'inférence précédentes).

Note, la substitution des équivalents est déductible et donc utilisable.

Notation : le fait qu'une formule α soit déductible à partir d'un ensemble d'hypothèses Θ est noté $\Theta \vdash \alpha$.

Démonstration par l'axiomatique.

Démontrer que $\vdash \neg\alpha \vee \alpha$

Démonstration par l'axiomatique.

Démontrer que $\vdash \neg\alpha \vee \alpha$

A2 [$\neg\alpha$/β] [$\neg\alpha$/α] $\qquad \neg\alpha \rightarrow (\neg\alpha \vee \neg\alpha) \qquad$ (1)

Démonstration par l'axiomatique.

Démontrer que $\vdash \neg\alpha \vee \alpha$

A2 $[\neg\alpha/\beta]$ $[\neg\alpha/\alpha]$	$\neg\alpha \rightarrow (\neg\alpha \vee \neg\alpha)$	(1)
A1 $[\neg\alpha/\alpha]$	$(\neg\alpha \vee \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha$	(2)

Démonstration par l'axiomatique.

Démontrer que $\vdash \neg\alpha \vee \alpha$

A2 $[\neg\alpha/\beta]$ $[\neg\alpha/\alpha]$	$\neg\alpha \rightarrow (\neg\alpha \vee \neg\alpha)$	(1)
A1 $[\neg\alpha/\alpha]$	$(\neg\alpha \vee \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha$	(2)
A4 $[(\neg\alpha \vee \neg\alpha)/\beta]$ $[\neg\alpha/\gamma]$	$((\neg\alpha \vee \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (((\neg\alpha \vee \neg\alpha) \vee \alpha) \rightarrow (\neg\alpha \vee \alpha))$	(3)

Démonstration par l'axiomatique.

Démontrer que $\vdash \neg\alpha \vee \alpha$

A2 $[\neg\alpha/\beta]$ $[\neg\alpha/\alpha]$	$\neg\alpha \rightarrow (\neg\alpha \vee \neg\alpha)$	(1)
A1 $[\neg\alpha/\alpha]$	$(\neg\alpha \vee \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha$	(2)
A4 $[(\neg\alpha \vee \neg\alpha)/\beta]$ $[\neg\alpha/\gamma]$	$((\neg\alpha \vee \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (((\neg\alpha \vee \neg\alpha) \vee \alpha) \rightarrow (\neg\alpha \vee \alpha))$	(3)
(2,3)$\times$MP	$((\neg\alpha \vee \neg\alpha) \vee \alpha) \rightarrow (\neg\alpha \vee \alpha)$	(4)

Démonstration par l'axiomatique.

Démontrer que $\vdash \neg\alpha \vee \alpha$

A2 $[\neg\alpha/\beta]$ $[\neg\alpha/\alpha]$	$\neg\alpha \rightarrow (\neg\alpha \vee \neg\alpha)$	(1)
A1 $[\neg\alpha/\alpha]$	$(\neg\alpha \vee \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha$	(2)
A4 $[(\neg\alpha \vee \neg\alpha)/\beta]$ $[\neg\alpha/\gamma]$	$((\neg\alpha \vee \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (((\neg\alpha \vee \neg\alpha) \vee \alpha) \rightarrow (\neg\alpha \vee \alpha))$	(3)
(2,3)$\times$MP	$((\neg\alpha \vee \neg\alpha) \vee \alpha) \rightarrow (\neg\alpha \vee \alpha)$	(4)
A3 $[(\neg\alpha \vee \neg\alpha)/\beta]$	$(\alpha \vee (\neg\alpha \vee \neg\alpha)) \rightarrow ((\neg\alpha \vee \neg\alpha) \vee \alpha)$	(5)

Démonstration par l'axiomatique.

Démontrer que $\vdash \neg\alpha \vee \alpha$

A2 $[\neg\alpha/\beta]$ $[\neg\alpha/\alpha]$	$\neg\alpha \rightarrow (\neg\alpha \vee \neg\alpha)$	(1)
A1 $[\neg\alpha/\alpha]$	$(\neg\alpha \vee \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha$	(2)
A4 $[(\neg\alpha \vee \neg\alpha)/\beta]$ $[\neg\alpha/\gamma]$	$((\neg\alpha \vee \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (((\neg\alpha \vee \neg\alpha) \vee \alpha) \rightarrow (\neg\alpha \vee \alpha))$	(3)
2,3)$\times$MP	$((\neg\alpha \vee \neg\alpha) \vee \alpha) \rightarrow (\neg\alpha \vee \alpha)$	(4)
A3 $[(\neg\alpha \vee \neg\alpha)/\beta]$	$(\alpha \vee (\neg\alpha \vee \neg\alpha)) \rightarrow ((\neg\alpha \vee \neg\alpha) \vee \alpha)$	(5)
5), Def$_{\rightarrow}$	$(\neg\alpha \rightarrow (\neg\alpha \vee \neg\alpha)) \rightarrow ((\neg\alpha \vee \neg\alpha) \vee \alpha)$	(6)

Démonstration par l'axiomatique.

Démontrer que $\vdash \neg\alpha \vee \alpha$

A2 $[\neg\alpha/\beta]$ $[\neg\alpha/\alpha]$	$\neg\alpha \rightarrow (\neg\alpha \vee \neg\alpha)$	(1)
A1 $[\neg\alpha/\alpha]$	$(\neg\alpha \vee \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha$	(2)
A4 $[(\neg\alpha \vee \neg\alpha)/\beta]$ $[\neg\alpha/\gamma]$	$((\neg\alpha \vee \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (((\neg\alpha \vee \neg\alpha) \vee \alpha) \rightarrow (\neg\alpha \vee \alpha))$	(3)
(2,3)$\times$MP	$((\neg\alpha \vee \neg\alpha) \vee \alpha) \rightarrow (\neg\alpha \vee \alpha)$	(4)
A3 $[(\neg\alpha \vee \neg\alpha)/\beta]$	$(\alpha \vee (\neg\alpha \vee \neg\alpha)) \rightarrow ((\neg\alpha \vee \neg\alpha) \vee \alpha)$	(5)
(5), Def$_{\rightarrow}$	$(\neg\alpha \rightarrow (\neg\alpha \vee \neg\alpha)) \rightarrow ((\neg\alpha \vee \neg\alpha) \vee \alpha)$	(6)
(1,6)$\times$ MP	$(\neg\alpha \vee \neg\alpha) \vee \alpha$	(7)

Démonstration par l'axiomatique.

Démontrer que $\vdash \neg\alpha \vee \alpha$

2 $[\neg\alpha/\beta]$ $[\neg\alpha/\alpha]$	$\neg\alpha \rightarrow (\neg\alpha \vee \neg\alpha)$	(1)
1 $[\neg\alpha/\alpha]$	$(\neg\alpha \vee \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha$	(2)
4 $[(\neg\alpha \vee \neg\alpha)/\beta]$ $[\neg\alpha/\gamma]$	$((\neg\alpha \vee \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (((\neg\alpha \vee \neg\alpha) \vee \alpha) \rightarrow (\neg\alpha \vee \alpha))$	(3)
2,3)$\times$MP	$((\neg\alpha \vee \neg\alpha) \vee \alpha) \rightarrow (\neg\alpha \vee \alpha)$	(4)
3 $[(\neg\alpha \vee \neg\alpha)/\beta]$	$(\alpha \vee (\neg\alpha \vee \neg\alpha)) \rightarrow ((\neg\alpha \vee \neg\alpha) \vee \alpha)$	(5)
5), Def$_{\rightarrow}$	$(\neg\alpha \rightarrow (\neg\alpha \vee \neg\alpha)) \rightarrow ((\neg\alpha \vee \neg\alpha) \vee \alpha)$	(6)
1,6)$\times$ MP	$(\neg\alpha \vee \neg\alpha) \vee \alpha$	(7)
4,7)$\times$ MP	$\neg\alpha \vee \alpha$	(cqfd)

La sémantique.

Rappel : étude du vrai et du faux.

La sémantique.

Rappel : étude du vrai et du faux.

Définition 1 *Une* **fonction de valuation** *est une fonction* $v : Var \mapsto \{Vrai, Faux\}$.

La sémantique.

Rappel : étude du vrai et du faux.

Définition 2 *Une* **fonction de valuation** *est une fonction* $v : Var \mapsto \{Vrai, Faux\}$*.*

Définition 3 *Une* **interprétation** *est une fonction :* $i : WFF \mapsto \{Vrai, Faux\}$*.*

- $i \models p$ *ssi* $v(p) = Vrai$ *avec* ($p \in Var$)
- $i \models \neg\alpha$ *ssi* $i \not\models \alpha$
- $i \models \alpha \land \beta$ *ssi* $i \models \alpha$ *et* $i \models \beta$

La sémantique.

Rappel : étude du vrai et du faux.

Définition 4 *Une* **fonction de valuation** *est une fonction* $v : Var \mapsto \{Vrai, Faux\}$*.*

Définition 5 *Une* **interprétation** *est une fonction :* $i : WFF \mapsto \{Vrai, Faux\}$*.*

- $i \models p$ *ssi* $v(p) = Vrai$ *avec* ($p \in Var$)
- $i \models \neg\alpha$ *ssi* $i \not\models \alpha$
- $i \models \alpha \wedge \beta$ *ssi* $i \models \alpha$ *et* $i \models \beta$

Définition 6 *Une interprétation* i *est un* **modèle** *de la formule* α *ssi* $i \models \alpha$*.*

La sémantique.

Rappel : étude du vrai et du faux.

Définition 7 *Une formule* α *est* **satisfaisable** *ou* **consistante** *ssi il existe une interprétation* i *telle que* $i \models \alpha$*.*

La sémantique.

Rappel : étude du vrai et du faux.

Définition 8 *Une formule α est* **satisfaisable** *ou* **consistante** *ssi il existe une interprétation i telle que $i \models \alpha$.*

Définition 9 *Une formule α est* **valide** *ssi il pour toute interprétation, $i \models \alpha$.*
noté $\models \alpha$

Démonstration via la sémantique

Possibilité d'utiliser des tables de vérité.

α	$\neg\alpha$	$\alpha \vee \neg\alpha$
V	F	V
F	V	V

Adéquation et complétude

Théorème 1 **adéquation** *ou* **cohérence**
Si une formule α est une théorème, alors elles est valide.
Si $\vdash \alpha$ alors $\models \alpha$.

Adéquation et complétude

Théorème 2 **adéquation** *ou* **cohérence**
Si une formule α est une théorème, alors elles est valide.
Si $\vdash \alpha$ alors $\models \alpha$.

Théorème 3 **Complétude**
Si une formule α est valide, alors c'est un théorème.
Si $\models \alpha$ alors $\vdash \alpha$.

Adéquation et complétude

Théorème 4 **adéquation** *ou* **cohérence**
Si une formule α est une théorème, alors elles est valide.
Si $\vdash \alpha$ alors $\models \alpha$.

Théorème 5 **Complétude**
Si une formule α est valide, alors c'est un théorème.
Si $\models \alpha$ alors $\vdash \alpha$.

Théorème 6 *Une formule est valide ssi c'est un théorème.*
$\models \alpha$ ssi $\vdash \alpha$.

Déduction automatique.

Avons nous besoin d'autres méthodes?

Déduction automatique.

- calcul des séquents
- méthode des tableaux
- ...

Méthode des tableaux (principe).

Démontrer qu’une formule est un théorème revient à démontrer qu’elle est valide.

Méthode des tableaux (principe).

Démontrer qu'une formule est un théorème revient à démontrer qu'elle est valide.

Démontrer qu'une formule est valide revient à démontrer que tous les modèles la satisfont.

Méthode des tableaux (principe).

Démontrer qu'une formule est un théorème revient à démontrer qu'elle est valide.

Démontrer qu'une formule est valide revient à démontrer que tous les modèles la satisfont.

Démontrer qu'une formule est satisfaite dans tous les modèles revient à démontrer qu'aucun modèle de satisfait sa négation.

Méthode des tableaux (principe).

Principe de la méthode des tableaux :

Pour démontrer qu'une formule α est un théorème, on essaie de trouver un modèle pour sa négation ($\neg\alpha$).

Méthode des tableaux (principe).

Principe de la méthode des tableaux :

Pour démontrer qu'une formule α est un théorème, on essaie de trouver un modèle pour sa négation ($\neg\alpha$).

<u>En cas de succès</u>, il est prouvé que α n'est pas un théorème.
Il est même possible d'exhiber un contre-modèle.

Méthode des tableaux (principe).

Principe de la méthode des tableaux :

Pour démontrer qu'une formule α est un théorème, on essaie de trouver un modèle pour sa négation ($\neg\alpha$).

<u>En cas de succès</u>, il est prouvé que α n'est pas un théorème.
Il est même possible d'exhiber un contre-modèle.

<u>En cas d'échec</u>, la recherche ayant été exhaustive cela prouve qu'il n'existe pas de modèle satisafisant $\neg\alpha$, qu'ils satisfont donc tous α, que cette formule est donc valide, c'est donc un théorème.

Méthode des tableaux (modifiée).

La méthode utilise un développement sous forme d'arbre.

Le nœud d'un arbre contient un ensemble de formules.

Un ensemble de règles permet de décomposer un noeud pour obtenir des fils, et ce en fonction des formules qui sont contenues dans ce nœud.

La décomposition s'applique jusqu'à arriver à des formules atomiques, i.e. de la forme p ou $\neg p$ avec $p \in Var$.

Méthode des tableaux (modifiée).

Règle du OU	$$\begin{array}{ccc} & \Gamma_1, \alpha \vee \beta, \Gamma_2 & \\ \swarrow & & \searrow \\ \Gamma_1, \alpha, \Gamma_2 & & \Gamma_1, \beta, \Gamma_2 \end{array}$$
Règle de la double négation	$$\begin{array}{c} \Gamma_1, \neg\neg\alpha, \Gamma_2 \\ \mid \\ \Gamma_1, \alpha, \Gamma_2 \end{array}$$
Règle du NON OU	$$\begin{array}{c} \Gamma_1, \neg(\alpha \vee \beta), \Gamma_2 \\ \mid \\ \Gamma_1, \neg\alpha, \neg\beta, \Gamma_2 \end{array}$$

Méthode des tableaux (modifiée).

Règle du ET	$\Gamma_1, \alpha \wedge \beta, \Gamma_2$ $\Gamma_1, \alpha, \beta, \Gamma_2$
Règle du NON ET	$\Gamma_1, \neg(\alpha \wedge \beta), \Gamma_2$ $\Gamma_1, \neg\beta, \Gamma_2 \qquad \Gamma_1, \neg\alpha, \Gamma_2$
Règle de l'implication	$\Gamma_1, \alpha \rightarrow \beta, \Gamma_2$ $\Gamma_1, \neg\alpha, \Gamma_2 \qquad \Gamma_1, \beta, \Gamma_2$
Règle du NON IMPL	$\Gamma_1, \neg(\alpha \rightarrow \beta), \Gamma_2$ $\Gamma_1, \alpha, \neg\beta\Gamma_2$
Règle de l'équivalence	$\Gamma_1, \alpha \leftrightarrow \beta, \Gamma_2$ $\Gamma_1, \neg\alpha, \neg\beta, \Gamma_2 \qquad \Gamma_1, \alpha, \beta, \Gamma_2$
...	...

Méthode des tableaux (modifiée).

Définition 10 *Un nœud est dit* **fermé** *ssi*

- *Il fait apparaître une contradiction, ou*
- *tous ses fils sont fermés*

Exemple de nœud faisant apparaître une contradiction :
$\Gamma_1, \alpha, \Gamma_2, \neg\alpha, \Gamma_3$.

Méthode des tableaux (modifiée).

Exemple : montrer que $\vdash (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \omega)) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \omega)$

$$\neg((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \omega)) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \omega))$$

$$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \omega)), \neg((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \omega)$$

$$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \omega)), \alpha \wedge \beta, \neg\omega$$

$$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \omega)), \alpha, \beta, \neg\omega$$

$$\neg\alpha, \alpha, \beta, \neg\omega \qquad \beta \rightarrow \omega, \alpha, \beta, \neg\omega$$

$$\neg\beta, \alpha, \beta, \neg\omega \qquad \omega, \alpha, \beta, \neg\omega$$

Méthode des tableaux (modifiée).

Exemple : montrer que $\vdash (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \omega)) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \omega)$

$$\neg((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \omega)) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \omega))$$

$$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \omega)), \neg((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \omega)$$

$$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \omega)), \alpha \wedge \beta, \neg\omega$$

$$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \omega)), \alpha, \beta, \neg\omega$$

$$[\underline{\neg\alpha}, \underline{\alpha}, \beta, \neg\omega] \qquad \beta \rightarrow \omega, \alpha, \beta, \neg\omega$$

$$\neg\beta, \alpha, \beta, \neg\omega \qquad \omega, \alpha, \beta, \neg\omega$$

Méthode des tableaux (modifiée).

Exemple : montrer que $\vdash (\alpha \to (\beta \to \omega)) \to ((\alpha \wedge \beta) \to \omega)$

$$\neg((\alpha \to (\beta \to \omega)) \to ((\alpha \wedge \beta) \to \omega))$$

$$(\alpha \to (\beta \to \omega)), \neg((\alpha \wedge \beta) \to \omega)$$

$$(\alpha \to (\beta \to \omega)), \alpha \wedge \beta, \neg\omega$$

$$(\alpha \to (\beta \to \omega)), \alpha, \beta, \neg\omega$$

$$[\underline{\neg\alpha}, \underline{\alpha}, \beta, \neg\omega] \qquad \beta \to \omega, \alpha, \beta, \neg\omega$$

$$[\underline{\neg\beta}, \alpha, \underline{\beta}, \neg\omega] \qquad [\underline{\omega}, \alpha, \beta, \underline{\neg\omega}]$$

Méthode des tableaux (modifiée).

Exemple : montrer que $\vdash (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \omega)) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \omega)$

$$[\neg((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \omega)) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \omega))]$$

$$[(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \omega)), \neg((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \omega)]$$

$$[(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \omega)), \alpha \wedge \beta, \neg\omega]$$

$$[(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \omega)), \alpha, \beta, \neg\omega]$$

$$[\underline{\neg\alpha}, \underline{\alpha}, \beta, \neg\omega] \qquad [\beta \rightarrow \omega, \alpha, \beta, \neg\omega]$$

$$[\underline{\neg\beta}, \alpha, \underline{\beta}, \neg\omega] \qquad [\underline{\omega}, \alpha, \beta, \underline{\neg\omega}]$$

Méthode des tableaux (modifiée).

Exemple : montrer que $\vdash (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \omega)) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \omega)$

$$[\neg((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \omega)) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \omega))]$$

$$[(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \omega)), \neg((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \omega)]$$

$$[(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \omega)), \alpha \wedge \beta, \neg\omega]$$

$$[(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \omega)), \alpha, \beta, \neg\omega]$$

$$[\underline{\neg\alpha}, \underline{\alpha}, \beta, \neg\omega] \qquad [\beta \rightarrow \omega, \alpha, \beta, \neg\omega]$$

$$[\underline{\neg\beta}, \alpha, \underline{\beta}, \neg\omega] \qquad [\underline{\omega}, \alpha, \beta, \underline{\neg\omega}]$$

Le tableau est fermé, donc
$\vdash (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \omega)) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \omega)$.

Méthode des tableaux (modifiée).

Exemple : montrer que $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

$$\begin{array}{c}
\neg((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) \\
| \\
\alpha \rightarrow \beta, \neg(\beta \rightarrow \alpha) \\
| \\
\alpha \rightarrow \beta, \beta, \neg\alpha \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\neg\alpha, \beta \qquad \beta, \neg\alpha
\end{array}$$

Méthode des tableaux (modifiée).

Exemple : montrer que $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

$$\neg((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha))$$

$$\alpha \rightarrow \beta, \neg(\beta \rightarrow \alpha)$$

$$\alpha \rightarrow \beta, \beta, \neg\alpha$$

$$\neg\alpha, \beta \qquad \beta, \neg\alpha$$

Le tableau n'est pas fermé donc, $\nvdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$.

Méthode des tableaux (modifiée).

Exemple : montrer que $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

$$\neg((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha))$$

$$\alpha \rightarrow \beta, \neg(\beta \rightarrow \alpha)$$

$$\alpha \rightarrow \beta, \beta, \neg\alpha$$

$$\neg\alpha, \beta \qquad\qquad \beta, \neg\alpha$$

Le tableau n'est pas fermé donc, $\not\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$.

Contremodèle:

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$	$\beta \rightarrow \alpha$	$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
F	V	V	F	F

Bilan

- Certains choix peuvent être remis en question. Par exemple, remplacer “Vrai” par “Démontrable”. Quelles conséquences? $\longrightarrow$ logiques substructurelles.

Bilan

- Décidable.
- Le problème de la satisfaisablilité d'une formule booléenne est NP-Complet.

Bilan

- Peut être étendu pour prendre en compte des modalités. . .

- Ne permet pas de prendre en compte les informations contenues à l'intérieur des proposition, ce qui lui confère un **pouvoir d'expression limité** ce qui limite son champ d'application. En particulier, aucune notion d'individu, et encore moins de relations entre individus.

La suite

- Calcul du premier ordre
- Logiques intentionnelles (ou logiques modales).