

GEOMETRIE DISCRETE ET IMAGES

Dans le premier chapitre, nous avons présenté comment il était possible d'interpréter une image dans le cadre de la théorie des ensembles. Ceci nous a permis de définir Trois catégories d'images :

- Les images en noir et blanc
- Les images en teintes de gris
- Les images en couleurs ou multimodales

Chaque type d'image est caractérisé par :

- *Le support de l'image* défini dans un espace métrique
- Une ou plusieurs *fonctions associées à chaque point* de cette image.

Le traitement de ces images se fait maintenant uniquement par des méthodes numériques utilisant les grandes possibilités des ordinateurs. On va donc voir dans ce chapitre qu'elles sont les *effets du passage de l'espace continu à l'espace discret*. En complément, la numérisation des fonctions associées sera traitée rapidement.

La majorité des images ont un *support défini dans l'espace \mathbf{R}^2* . Nous allons donc focaliser notre étude sur cet espace en évoquant uniquement le cas d'un support défini dans \mathbf{R}^3 .

1. Discrétisation de l'espace \mathbf{R}^2

Pour simplifier, considérons une image constituée d'objets gris sur un fond noir. Chaque objet possède une infinité de points. Il faut donc simplifier la représentation de l'image en faisant ce qu'on appelle un « échantillonnage » de l'espace. On va donc réaliser *un pavage du plan*. C'est à dire faire une partition du plan en domaines contigus remplissant tout l'espace.

1.1 Les méthodes de pavage

Il y a deux grandes méthodes de pavage de l'espace :

- Le pavage régulier (figure 1a)
- Le pavage aléatoire (figure 1b)

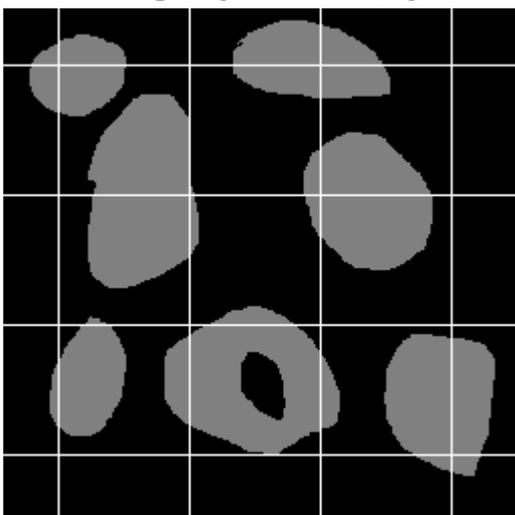


Figure 1a : Pavage par des carrés.

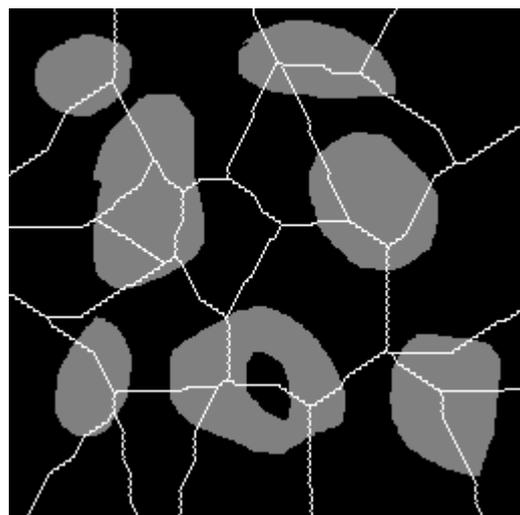


Figure 1b : Pavage aléatoire.

Ce second type de pavage est parfois utilisé en imagerie, cependant nous ne parlerons que du pavage régulier.

1.2 Le pavage régulier du plan

On s'impose comme règles de pavage les contraintes suivantes :

- Utilisation de polygones réguliers. Par exemple, on exclut le pavage par un rectangle.
- Utilisation d'un seul type de polygone pour remplir l'espace.

La figure 2 montre quelques pavages réguliers du plan.

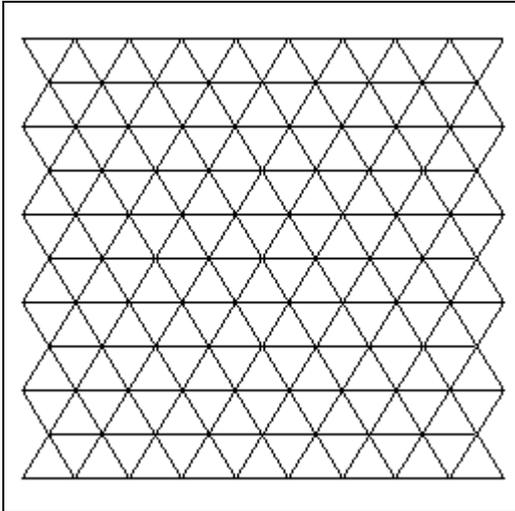


Figure 2a : Pavage triangulaire.

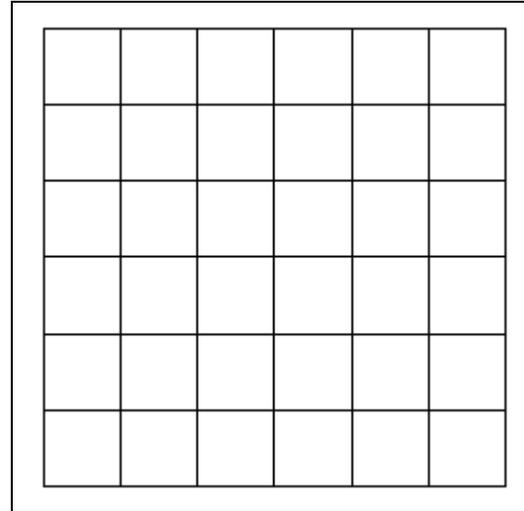


Figure 2b : Pavage carré.

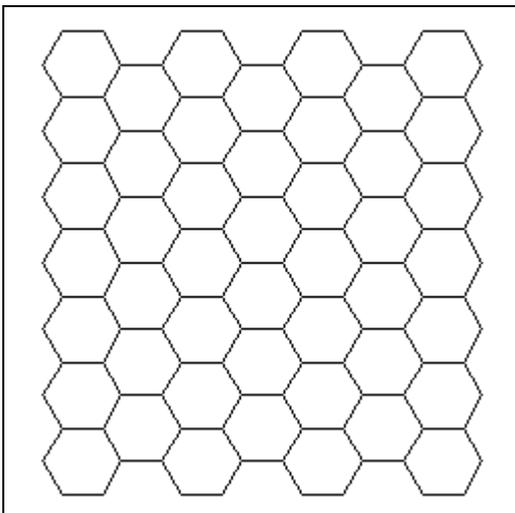


Figure 2c : Pavage hexagonal.

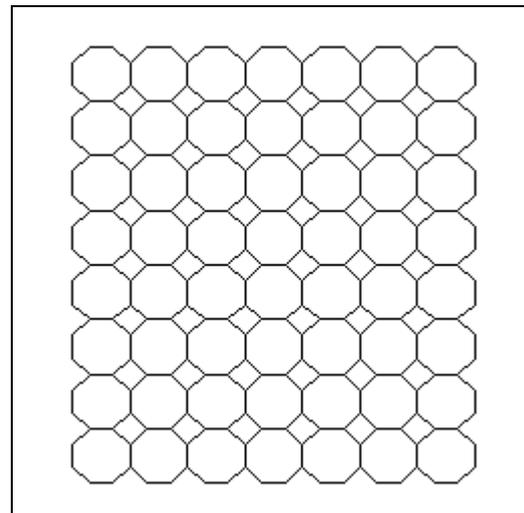


Figure 2d : Pavage octogonal.

On peut faire les remarques suivantes :

- Les pavages triangulaires, carrés et hexagonaux respectent bien les règles fixées.
- Le pavage triangulaire conduit à 2 triangles équilatéraux de même taille mais symétriques par rapport à l'horizontale.
- Le pavage par des octogones ne remplit pas complètement l'espace. Il doit être complété par des carrés et n'obéit donc pas aux règles que nous nous sommes données.

Ce résultat n'est pas surprenant et on peut démontrer facilement que les figures 2a à 2c sont les seules possibilités de pavage régulier dans \mathbf{R}^2 .

Géométrie discrète et images

En effet, un polygone régulier est caractérisé par (figure 3) :

- Un centre P
- Un nombre de coté n
- Un nombre s de polygones communs à chaque sommet S
- L'angle au sommet θ

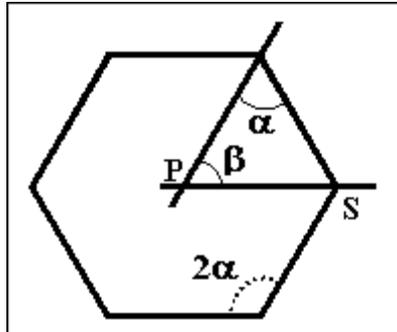


Figure 3 : Caractéristiques d'un polygone régulier.

Des considérations géométriques simples permettent d'obtenir les relations suivantes :

$$\text{Angle au centre } \beta = 2\pi/n$$

$$\text{Angle au sommet } \theta = 2\alpha$$

On en déduit :

$$\beta + 2\alpha = \pi$$

d'où :

$$\theta = \pi \times \frac{n-2}{n}$$

On a également :

$$s \times \theta = 2\pi$$

Ce qui permet d'écrire :

$$s = \frac{2n}{n-2}$$

s et n sont des entiers strictement supérieurs à 2 ($n = 2$ ne peut pas définir un polygone).

On peut également remarquer que pour $n \geq 7$, l'équation précédente donne $s < 3$. Il n'y a donc de solution que pour $n < 7$.

Les trois solutions sont alors les suivantes :

Polygone régulier	Nombre de cotés n	Nombre de polygones communs au sommet S
Triangle	3	6
Carré	4	4
Hexagone	6	3

Tableau 1 : Pavage régulier de l'espace \mathbf{R}^2 .

1.3 Récursivité du pavage

La récursivité d'un pavage est une propriété qui peut être intéressante. Un pavage est récursif s'il peut être décomposé en pavés de même nature et plus petit. Cette propriété est utilisée dans les représentations hiérarchiques (quadrees) ou les pyramides morphologiques. Ceci est particulièrement important dans les changements de résolution spatiale (modification du grandissement).

Les pavages carrés et triangulaires sont récursifs (figure 4), mais le pavage hexagonal ne l'est pas.

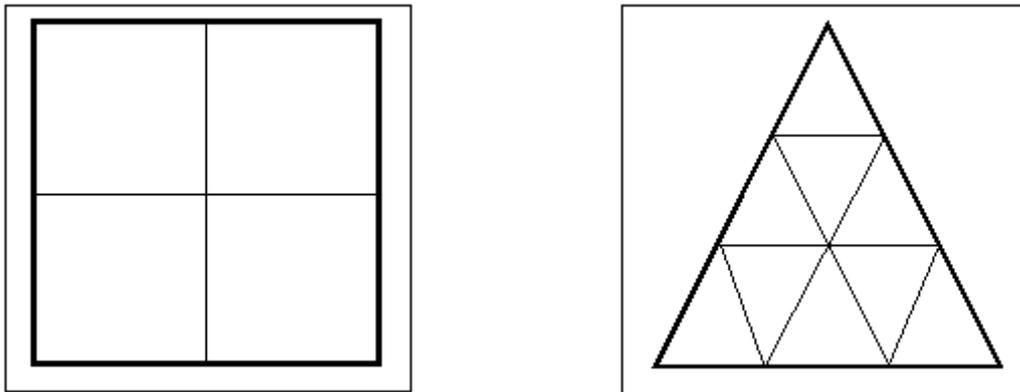


Figure 4 : Pavages récursifs.

1.4 Maillage de l'espace \mathbb{R}^2

Chaque pavé élémentaire est appelé tesselle. On lui associe un point \mathbf{P} qui est généralement son barycentre. A un pavage régulier correspond donc un maillage régulier et périodique de l'espace. Chaque point \mathbf{P} est appelé *pixel*. Considérons deux pavés $\mathbf{T}(\mathbf{P})$ et $\mathbf{T}(\mathbf{Q})$ adjacents par une arête (figure 5). Le segment \mathbf{PQ} constitue un élément du maillage de l'espace. Le résultat conduit à un pavage induit.

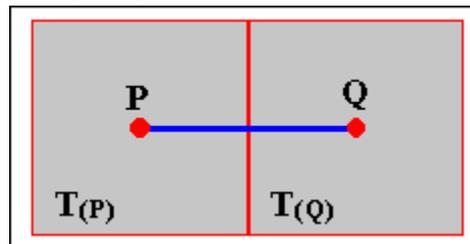


Figure 5 : construction du maillage.

A un pavage de géométrie donnée correspondra un maillage de géométrie induite. Le tableau 2 montre la correspondance entre les deux représentations.

Pavage	Maillage
Triangulaire	Hexagonal
Carré	Carré
Hexagonal	Triangulaire

Tableau 2 : Correspondance entre pavage et maillage.

La figure 6 illustre cette représentation.

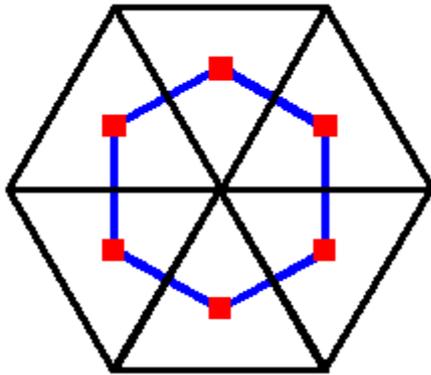


Figure 6a : Pavage triangulaire et maillage hexagonal.

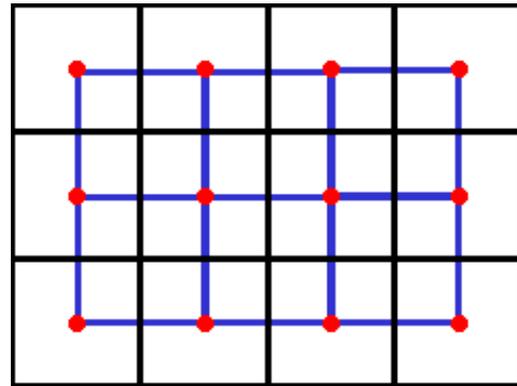


Figure 6b : Pavage carré et maillage carré en 4-connextite.

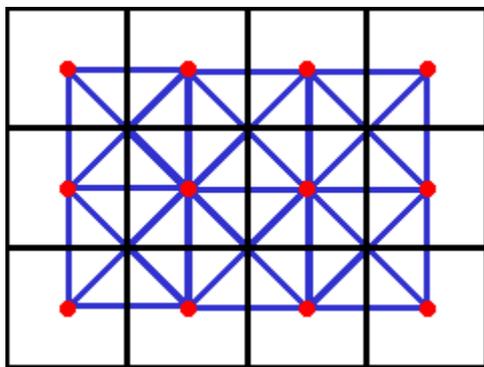


Figure 6c : Pavage carré et maillage carré en 8-connextite.

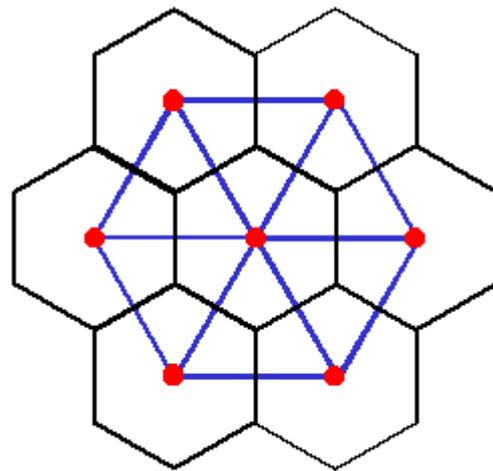


Figure 6d : Pavage hexagonal et maillage triangulaire.

En observant l'illustration des différents pavages, on peut faire les remarques suivantes :

- Le pavage triangulaire conduit à des pixels qui ne possèdent que trois voisins (figure 6a) avec une disposition peu compacte si on remplace chaque point P par un disque. *Ce type de pavage ne sera donc pas utilisé.*
- Le pavage carré conduit à une disposition des pixels de même nature avec 4 pixels voisins du pixel courant (figure 6b). Cette situation est plus compacte que la précédente puisqu'un pavé carré est plus proche du cercle qu'un pavé triangulaire.
- Avec le même pavage, on remarque qu'il existe bien 4 pavés adjacents par des cotés communs, mais qu'il y a également 4 pavés supplémentaires qui possèdent des sommets communs avec le pavé courant. Cela conduit à un maillage carré avec 8 voisins par pixel (figure 6c). Il faudra donc envisager deux situations pour le pavage carré.
- Le pavage hexagonal est celui qui est le plus compact, donc le plus favorable. On s'approche vraiment d'un empilement compact de disques. Chaque pixel possède six voisins.

1.5 Caractéristiques topologiques des maillages

La topologie dans l'espace discret fait directement appel à la notion de voisinage des pixels telle que nous venons de la donner. Il s'agit de voir maintenant si la topologie dans l'espace continu \mathbf{R}^2 est respectée lorsqu'on plonge cette topologie dans l'espace discret \mathbf{Z}^2 . Pour vérifier cela, on va utiliser un ensemble de référence \mathbf{E} dans lequel on a placé un ensemble \mathbf{X} simplement connexe. La frontière $\partial\mathbf{X}$ est une *courbe fermée simple*, c'est à dire une courbe qui ne se recoupe pas, (figure 7).

Selon le *théorème de Jordan* toute courbe simple fermée divise l'espace en deux domaines : un *domaine intérieur* \mathbf{X} et un *domaine extérieur* \mathbf{X}^c , chaque domaine étant *connexe*.

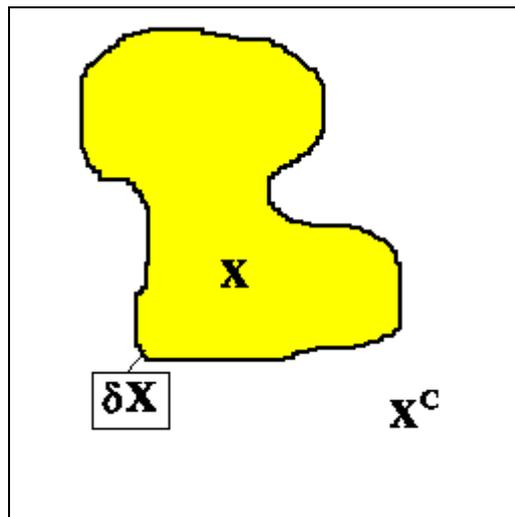


Figure 7 : Illustration du théorème de Jordan.

Plongeons un ensemble de même nature dans un maillage carré et un maillage hexagonal, (figure 8).

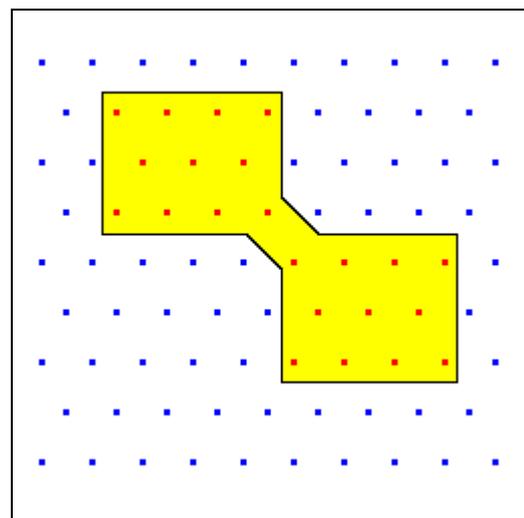
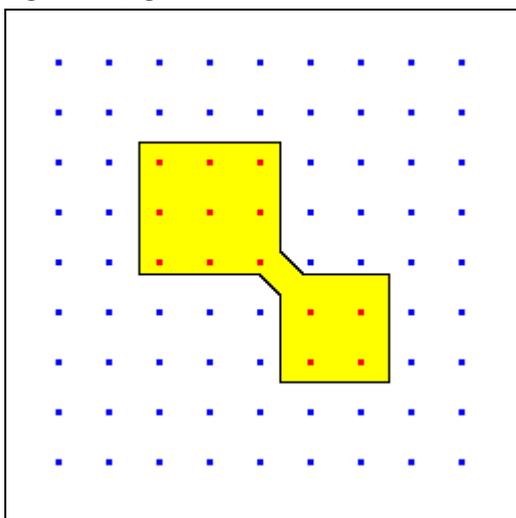


Figure 8a : Ensemble connexe plongé dans un maillage carré.

Figure 8a : Ensemble connexe plongé dans un maillage triangulaire.

Pour vérifier si le passage à l'espace discret préserve les propriétés topologiques, il faut prendre en compte le nombre de pixels premiers voisins connexes d'un pixel courant. Dans le

cas du maillage carré, on a deux possibilités : 4 et 8 connexe. Le maillage triangulaire est 6 connexe. Les figures 9a à 9d illustre les différentes situations.

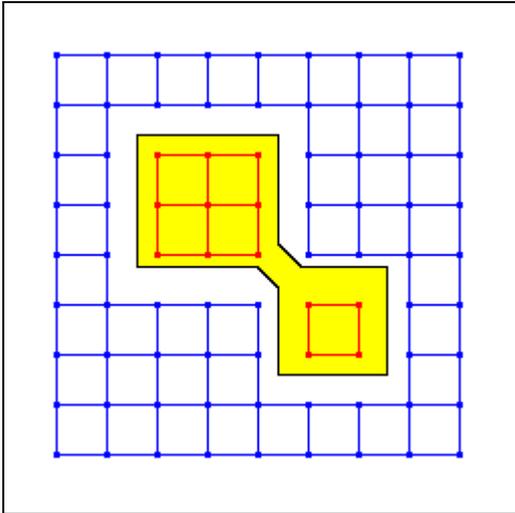


Figure 9a : Maillage 4-connextité.

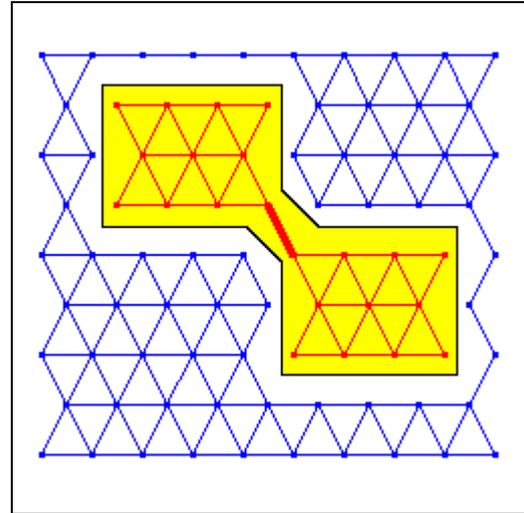


Figure 9b : Maillage 6-connextité.

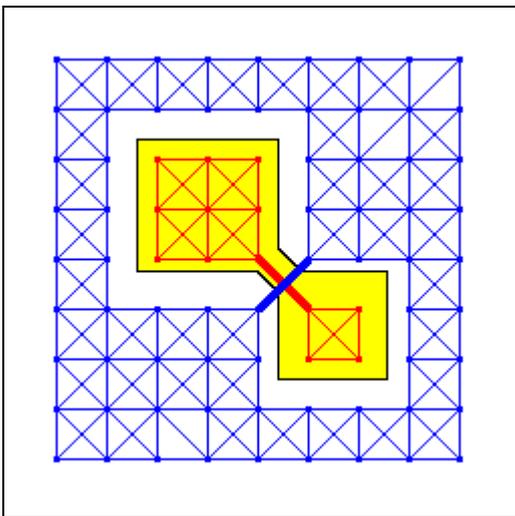


Figure 9c : Maillage 8-connextité.

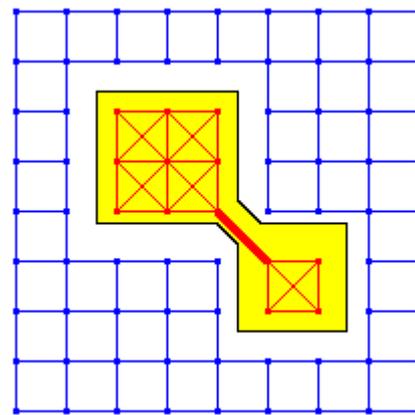


Figure 9d : Maillage 6-8-connextité

L'examen de ces figures permet de faire les commentaires suivants :

- Le *maillage 4-connextité* obtenue avec le *pavage carré* conduit à un fond \mathbf{X}^C connexe mais l'ensemble \mathbf{X} connexe dans \mathbf{R}^2 forme deux sous-ensembles disjoints dans \mathbf{Z}^2 , (figure 9a). Le théorème de Jordan n'est donc pas vérifié.
- Le *maillage 6-connextité* obtenue avec le *pavage hexagonal* conduit à un fond \mathbf{X}^C connexe et un ensemble \mathbf{X} connexe dans \mathbf{Z}^2 , (figure 9b). Le théorème de Jordan est donc vérifié.
- Le *maillage 8-connextité* obtenue avec le *pavage carré* conduit à un fond \mathbf{X}^C connexe et un ensemble \mathbf{X} connexe dans \mathbf{Z}^2 , (figure 9c). Mais une liaison parasite apparaît entre deux pixels du fond, situés de part et d'autre de \mathbf{X} . Le théorème de Jordan n'est donc pas vérifié.
- Par contre si on considère un *pavage carré* avec un ensemble \mathbf{X} , décrit dans un maillage 8-connextité et l'ensemble \mathbf{X}^C , décrit dans un maillage 4-connextité, le théorème de Jordan est vérifié, (figure 9d).

2. Discrétisation de l'espace \mathbf{R}^3

Dans le domaine de l'imagerie, il est parfois possible d'obtenir des images dans l'espace \mathbf{R}^3 . C'est particulièrement le cas pour les images de scanners X dans le domaine médical et dans une moindre mesure en science des matériaux.

Le pavage le plus simple est le pavage cubique qui conduit également à un maillage cubique.

D'autres solutions de maillage un peuvent être proposées. Elles dérivent directement des mailles cristallographiques : maillage cubique centré ou à faces centrées.

3. Discrétisation des fonctions radiométriques

Quel que soit le type de maillage utilisé, une ou plusieurs fonctions radiométriques sont associées aux pixels. Plaçons-nous dans le cas d'une image en niveaux de gris. Il est possible d'utiliser un nombre réel positif pour représenter « l'intensité lumineuse » du pixel, mais le plus souvent on utilisera un nombre entier. De plus, il faut savoir que le capteur fournit un signal qui ne peut varier qu'entre 0 et un maximum M si on l'utilise dans de bonnes conditions.

Selon la précision souhaitée, une image en niveaux de gris sera codée sur un ou plusieurs octets. Le tableau 3 donne les valeurs les plus courantes et la figure 10 illustre les principales classes d'image.

Nombre de bit	Valeur min	Valeur max	Nature des images
1	0	1	binaire
8	0	255	Niveaux de gris
16	0	65536	Niveaux de gris
	-32768	32767	
3×8	3×0	3×255	Image couleur

Tableau 3 : Caractéristiques des valeurs radiométriques et classes d'images.



Figure 10a : Image couleur.



Figure 10b : Image en niveaux de gris.



Figure 10c : Image en noir et blanc.

Il existe bien sûr d'autres codages comme des images codées sur 4 bits (16 valeurs) ou des images couleur codées sur 8 bits. Mais ce codage n'est utilisé que pour des applications graphiques sans idée d'analyse.

Comme l'indique le codage des images couleur, celle-ci peut être décomposée ou reconstruite à partir de trois images en niveaux de gris. Il existe plusieurs modes de décomposition qui ne seront pas vus ici mais uniquement illustrés par un exemple en décomposition suivant les trois canaux rouge vert et bleu, (figure 11).



Figure 11a : Canal rouge.



Figure 11b : Canal vert.



Figure 11c : Canal bleu.

Le principe de la décomposition est souvent utilisé en analyse d'images dans la phase de segmentation.

4. Les problèmes posés par le passage de l'espace continu à l'espace discret

La numérisation de l'image permet les opérations de traitement par des moyens informatiques mais peut introduire certains problèmes. Ces problèmes sont de deux ordres :

- Le passage d'un opérateur défini dans l'espace continu à l'opérateur équivalent dans l'espace discret.
- Le passage d'une mesure dans l'espace continu à une mesure dans l'espace discret.

La première catégorie de problème va être illustrée par deux exemples simples : la recherche de la frontière d'un ensemble et la recherche de l'enveloppe convexe ou la préservation de la convexité.

La seconde catégorie sera illustrée par le passage de la distance entre deux points dans l'espace continu à la même mesure dans l'espace discret.

4.1 Frontière d'un ensemble dans l'espace discret

Nous allons commencer par le cas le plus simple en plongeant un ensemble \mathbf{X} défini dans \mathbf{R}^2 dans un pavage carré. On obtient ainsi une image binaire avec des pixels à 1 pour \mathbf{X} et des pixels à 0 pour \mathbf{X}^c . Pour respecter le théorème de Jordan, on supposera que le fond \mathbf{X}^c est représenté en 4-connexité et l'ensemble \mathbf{X} en 8-connexité, (figure 10). A la différence de l'espace continu, on ne peut pas utiliser la différence symétrique entre l'adhérence et l'intérieur :

$$\mathbf{Fr}(\mathbf{x}) = \partial\mathbf{X} = \mathbf{adh}(\mathbf{X}) / \mathbf{int}(\mathbf{X})$$

Sur le maillage donné, un pixel sera un pixel appartenant à une frontière si un de ses voisins n'a pas la même couleur. Mais deux situations se présentent :

- $(P \in \mathbf{X})$ et $(P'_{\text{voisin}} \in \mathbf{X}^c) \Rightarrow P \in \partial\mathbf{X}(\text{intérieur})$
- $(P \in \mathbf{X}^c)$ et $(P'_{\text{voisin}} \in \mathbf{X}) \Rightarrow P \in \partial\mathbf{X}(\text{extérieur})$

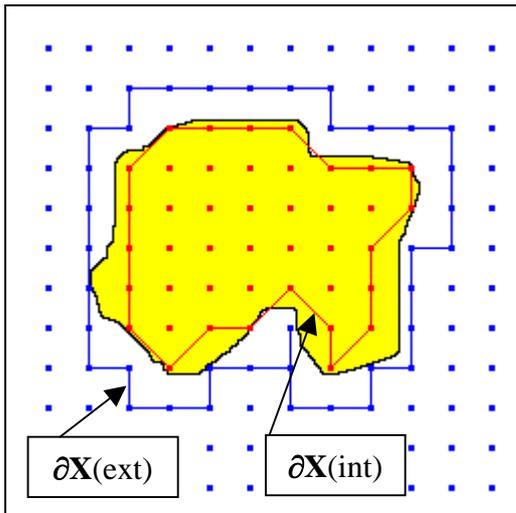


Figure 12a : Illustration de la notion de frontière sur un maillage carré.

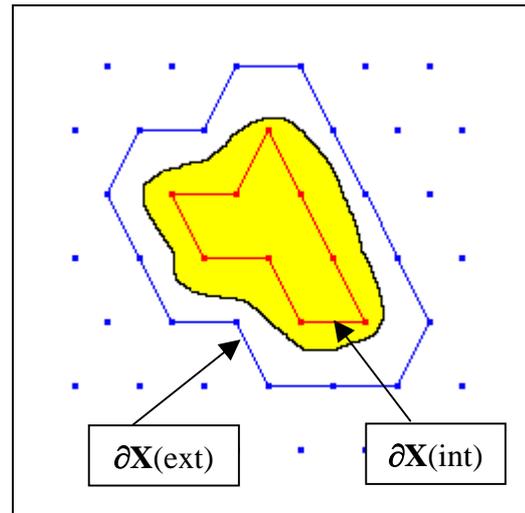


Figure 12b : Illustration de la notion de frontière sur un maillage triangulaire.

On voit donc que la frontière unique dans \mathbf{R}^2 se traduit par 2 frontières dans \mathbf{Z}^2 : une frontière intérieure et une frontière extérieure.

Dans le cas du maillage carré, il est impératif d'inverser la connexité lorsqu'on passe de la frontière intérieure à la frontière extérieure. On peut se servir de la figure 9c et 9d pour voir la frontière parasite bleue sur la figure 9c.

Par contre avec le maillage triangulaire (pavage hexagonal), la connexité 6 est vérifiée aussi bien pour la frontière intérieure que pour la frontière extérieure, (figures 12a et b).

4.2 Ensemble convexe dans l'espace discret

La première question que l'on peut se poser est de savoir si la représentation discrète d'un ensemble convexe de \mathbf{R}^2 reste convexe dans \mathbf{Z}^2 .

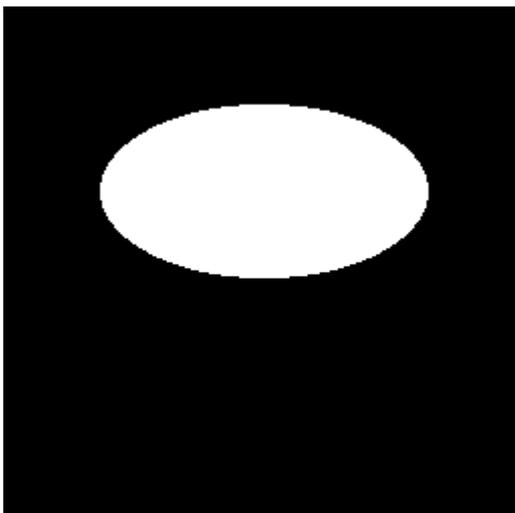


Figure 13a : Disque elliptique dans \mathbf{R}^2 .

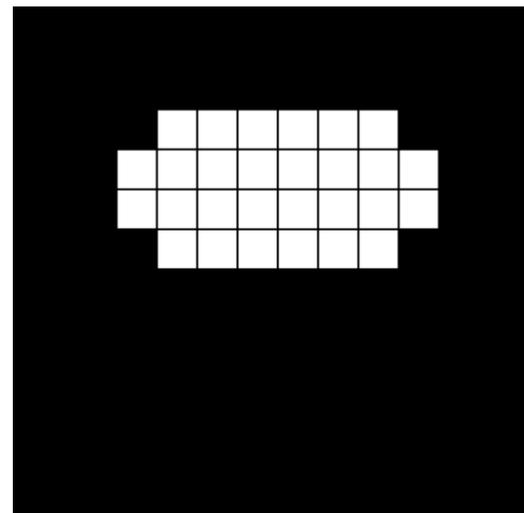


Figure 13b : Pavage carré associé dans \mathbf{R}^2 .

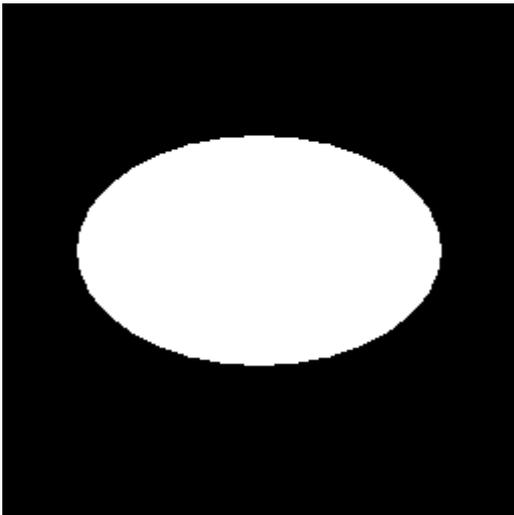


Figure 14a : Disque elliptique dans \mathbf{R}^2 .

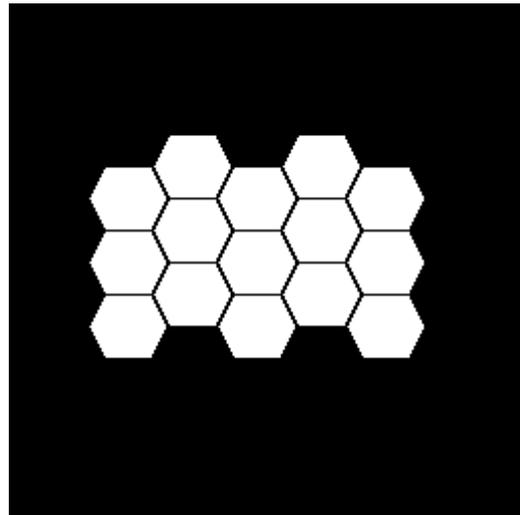


Figure 14b : Pavage hexagonal associé dans \mathbf{R}^2 .

Par définition, un disque elliptique est un ensemble convexe dans \mathbf{R}^2 , (figure 13a). Mais le pavage carré associé (figure 13b) n'est plus convexe dans \mathbf{R}^2 . Le passage dans un espace discret peut donc entraîner une perte de convexité au sens de l'espace continu. La même remarque peut être faite avec le pavage hexagonal, (figures 14a et 14b).

Pour contourner cette difficulté, il faudra redéfinir la notion d'ensemble convexe dans \mathbf{Z}^2 . Cela pourra se faire aisément à partir des opérateurs morphologiques que l'on verra par la suite¹.

4.3 La notion de distance dans l'espace discret

Comme nous l'avons déjà dit, le support des images est défini dans un espace métrique \mathbf{R}^2 , donc muni d'une distance. Nous allons voir maintenant que devient cette notion de distance lorsque nous passons de \mathbf{R}^2 à \mathbf{Z}^2 .

Nous allons regarder ce qui se passe d'abord pour le maillage carré en 4 et 8-connexité, (figure 15) et pour le maillage triangulaire (pavage hexagonal) en 6-connexité, (figure 16).

4.3.1 Définition de la distance discrète

Dans \mathbf{R}^2 , la distance $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ entre deux points \mathbf{x} et \mathbf{y} est matérialisée par le segment de droite qui joint ces points. C'est le chemin le plus court. Dans \mathbf{Z}^2 , ce chemin doit obligatoirement passer par des arêtes de la maille. Rappelons que l'arête d'une maille est le segment droit qui joint deux pixels voisins (connexes).

- Dans le cas du *maillage carré*, il y a deux possibilités : un chemin en 4-connexité, et un chemin en 8-connexité. Le *chemin en 4-connexité* ne contient que des arêtes verticales et horizontales. Pour le *chemin en 8-connexité*, il faut ajouter les arêtes « diagonales » orientées à $\pm 45^\circ$.
- Pour le *maillage triangulaire*, il n'y a qu'une seule possibilité avec des arêtes à 60° les une des autres.

La mesure de cette distance se fait simplement en comptant le nombre d'arêtes qu'il faut parcourir pour aller de \mathbf{x} à \mathbf{y} .

¹ Morphologie mathématique : opérateur de fermeture.

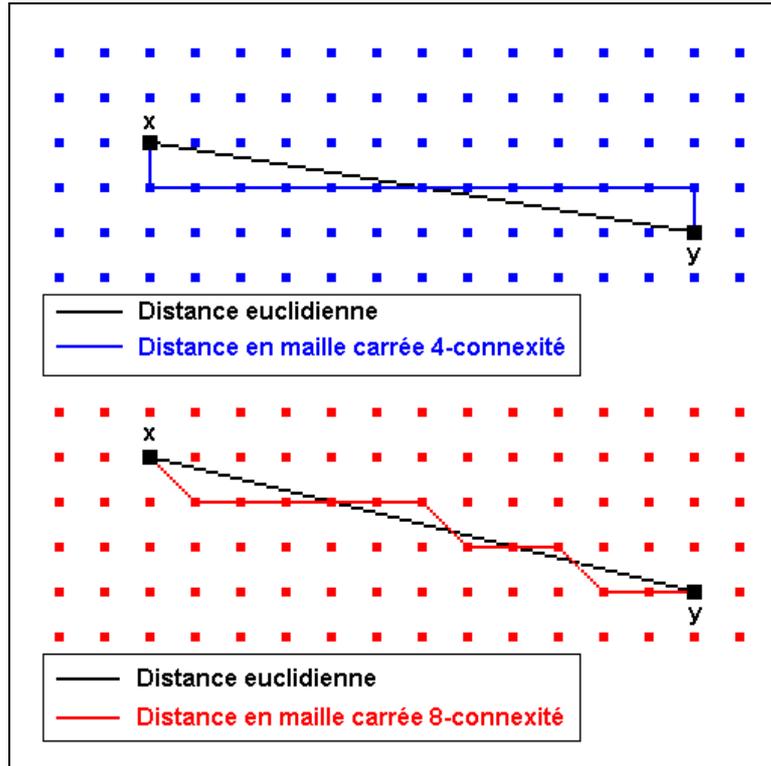


Figure 15 : Distances discrètes en maille carrée.

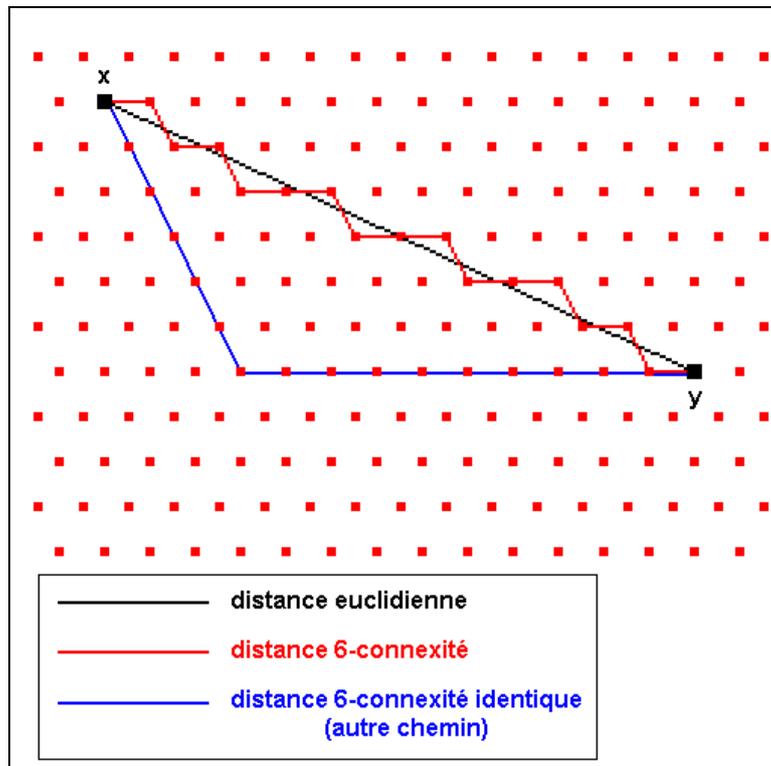


Figure 16 : Distances discrètes en maille triangulaire.

Pour le *maillage triangulaire et carré 4-connectivité*, toutes les arêtes ont la même taille. Si on appelle a cette distance et n , le nombre d'arêtes qu'il faut parcourir, la distance $d_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ s'écrit :

$$d_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = n \times a$$

k représente la connexité de la maille utilisée.

Pour le *maillage carrée 8-connexité*, les arêtes verticales et horizontales ont une longueur a et les arêtes diagonales une longueur $a\sqrt{2}$. Il faudrait en principe en tenir compte dans le calcul de la distance discrète. Cependant, l'usage veut qu'on ne fasse pas la distinction. Cela sera justifié en utilisant les opérateurs morphologiques pour atteindre cette distance.

4.3.2 *Non-unicité du chemin le plus court dans \mathbf{Z}^2*

Dans l'espace \mathbf{R}^2 , comme dans les espaces de dimension supérieure, le chemin le plus court entre deux points est unique : c'est le segment droit qui joint ces points.

Dans l'espace \mathbf{Z}^2 , comme dans les espaces de dimension supérieure, il existe plusieurs chemins de même longueur pour joindre les deux points. Nous l'avons illustré uniquement pour la maille triangulaire (figure 16), mais cela reste vrai pour le maillage 4 ou 8-connexité.