

# **INTRODUCTION A LA MORPHOLOGIE MATHEMATIQUE**

## **1. L'esprit de la morphologie mathématique**

Pour décrire une forme, on la compare souvent avec un objet de forme connue. Les exemples dans le langage courant sont assez nombreux.

Ainsi lorsque le métallographe décrit une microstructure, il utilise toujours ce type de démarche : ainsi, il parlera de fonte à graphite sphéroïdal ou de fonte à graphite lamellaire ; la présence d'une structure en aiguille dans un acier lui indique que celui-ci a subi un traitement thermique de trempe. Cette manière de voir est d'ailleurs la même pour le biologiste et le géologue ; elle est tout à fait dans l'esprit de la morphologie mathématique (G. Matheron (1975), J. Serra (1982)).

En effet, l'idée de base de la morphologie mathématique est de comparer les objets que l'on veut analyser à un autre objet de forme connue appelé *élément structurant*. En quelque sorte chaque élément structurant fait apparaître l'objet sous un jour nouveau, tout l'art consistant à choisir le bon éclairage.

## **2. Petite histoire de la morphologie mathématique**

### **2.1 Les grandes étapes**

La morphologie mathématique a été créée pour résoudre certains problèmes pour lesquels les méthodes classiques étaient inadéquates. C'était le cas, en particulier en géologie et en métallurgie où la notion d'objet individuel perdait tout son sens puisque celui-ci ne pouvait être connu que partiellement dans le champ d'un oculaire de microscope.

La quantification des structures géologiques a conduit Georges MATHERON de l'Ecole des Mines de Paris à construire les outils mathématiques nécessaires à cette analyse. Il a été aidé très rapidement par Jean SERRA. Ils ont ainsi constitué un groupe de recherche qui est devenu le Centre de Morphologie Mathématique et de Géostatistique de Fontainebleau.

La période historique se divise en deux étapes. En effet, dans ces premiers développements la morphologie mathématique n'avait qu'un caractère strictement ensembliste. Ensuite ces notions ont été étendues aux fonctions.

#### *2.1.1 Première époque « ensembliste »*

Il va de soi que les deux époques ne sont pas strictement séparables, mais pour simplifier, on peut dire que cette première époque s'arrête lorsque les concepteurs de la morphologie mathématique l'étendent au domaine fonctionnel.

Cette époque commence « officiellement » en 1965 par la parution du premier livre de G. Matheron<sup>1</sup> suivi du second<sup>2</sup>. En 1969, J. Serra publie un document synthétique<sup>3</sup> décrivant les grands principes de la morphologie mathématique.

Les travaux de G. Matheron concernant l'aspect ensembliste sont publiés ensuite dans un autre livre en langue anglaise<sup>4</sup>. Enfin cette période s'achève avec le livre de référence de J. Serra<sup>5</sup>.

#### *2.1.2 Deuxième époque « généralisation des concepts »*

Dès 1982 C. Lantuéjoul et J. Serra<sup>6</sup> rédigent une publication étendant aux fonctions les opérateurs morphologiques. En 1984, un cours sur les filtrages est fait par J. Serra à Fontainebleau. Enfin, en 1989 un second tome<sup>7</sup> complète le livre de 1982.

## **2.2 La bibliographie sommaire**

### *2.2.1 Livres en langue française*

Les publications de Fontainebleau sont essentiellement en langue anglaise. Il existe cependant deux livres édités en français traitant de la morphologie mathématique. Le premier est principalement destiné à l'analyse<sup>8</sup> constitue une bonne introduction pour lire ensuite les ouvrages de référence de l'Ecole des Mines. Le second traite d'une manière plus synthétique de la morphologie mathématique<sup>9</sup>.

### *2.2.2 Développement à l'étranger et les ouvrages publiés*

La morphologie mathématique ne s'est développée que plus tardivement à l'étranger en particulier aux Etats Unis. Dans ce domaine, on peut citer les travaux de Sternberg<sup>10</sup> dans les années 1970. Plus récemment C.R. Giardina et E.R. Dougherty<sup>11</sup> ont publié un certain nombre d'ouvrages dans lesquels la morphologie mathématique à une part importante. Heijmans<sup>12</sup> a également publié un ouvrage d'un abord plus difficile. Enfin, on peut également citer le livre de P. Soille<sup>13</sup> très illustré et qui correspond à la traduction d'un ouvrage en allemand du même auteur<sup>14</sup>.

Il est à noter qu'actuellement tous livres ayant pour objet le traitement d'image ont au moins un chapitre sur la morphologie mathématique.

## **2.3 Evolution de l'appareillage**

Le centre de morphologie Mathématique de Fontainebleau ne s'est pas contenté de mettre au point des méthodes théoriques mais a réalisé les moyens techniques de les mettre en oeuvre. En effet, pour être appliquée, la morphologie mathématique nécessite des outils informatiques assez puissants.

Pour traiter les images binaires, J. Klein et J. Serra ont conçu le premier processeur spécialisé en 1971. Celui-ci a permis de construire un appareil commercialisé par Leitz en 1974-1975. Ces deux appareils n'étaient conçus que pour traiter que des images ensemblistes. En 1980, le Leitz TAS permet un début de traitement des images en niveaux de gris. Il est concurrencé par l'IBAS de la société Kontron qui apparaît à la même époque.

Depuis cette époque d'autres appareils spécialisés en morphologie mathématique ont vu le jour (Nachet NS1500 et NS15000, Matra Péricolor 2000 et 3000, Morphopéricolor,...).

## **2.4 Du matériel au logiciel**

Les ordinateurs sont devenus de plus en plus puissants. Dans un premier temps, le traitement d'images s'est pratiqué sur des stations de travail nettement plus performantes que les premiers PC. C'est ainsi que l'Ecole des Mines a développé, dans les années 1980, le langage Morpholog en langage C et exécutable sur un VAX ou des ordinateurs Digital Equipment Corporation<sup>15</sup>. B. Laÿ a ensuite créé la société Noésis qui a développé un langage voisin appelé Visilog et tournant sur station de travail ou sur PC. Le logiciel commercial le plus récent et le plus complet dans le domaine de la morphologie mathématique est Aphélon, produit de la Société Adcis. Il permet de construire des applications d'analyses d'images complexes sous Windows avec Visual Basic comme langage de programmation.

Enfin, il faut citer Micromorph, développé par l'Ecole des Mines. C'est un logiciel uniquement dédié à la morphologie mathématique et qui a été conçu dans un but pédagogique. Il s'utilise sous Windows et possède un langage de programmation spécifique.

La liste n'est pas exhaustive puisque presque toutes les applications logicielles en traitement d'images contiennent des opérateurs morphologiques.

### 3. Le principe de base

Pour illustrer le principe de base, nous allons choisir un ensemble  $X$  appartenant à l'espace plan  $E$ , (figure 1).  $E$  est un espace métrique. Ensuite nous sélectionnons un élément structurant  $B$ . Cet élément structurant est repéré par un point  $O$ .

L'étape suivante consiste à parcourir tous les points de l'espace  $E$  avec cet élément structurant. Pour chaque position  $x$  de  $B$ , notée  $B_x$ , nous posons une question de nature ensembliste relative à  $X$  et  $B_x$ . Toutes les réponses positives forment un nouvel ensemble  $Y$ .

Dans l'exemple choisi, l'élément structurant a été placé selon 3 positions correspondant aux trois positions relatives possibles en  $X$  et  $B$ . On en déduit 3 questions possibles :

- Est-ce que  $B$  centré en  $x$  est disjoint de  $X$  ?
- Est-ce que  $B$  centré en  $x$  touche  $X$  ?
- Est-ce que  $B$  centré en  $x$  est inclus dans  $X$  ?

La première question se déduit d'une réponse négative aux deux suivantes. On se contentera donc de conserver ces deux dernières. Elles permettront de définir les deux opérateurs de base de la morphologie mathématique : la dilatation et l'érosion.

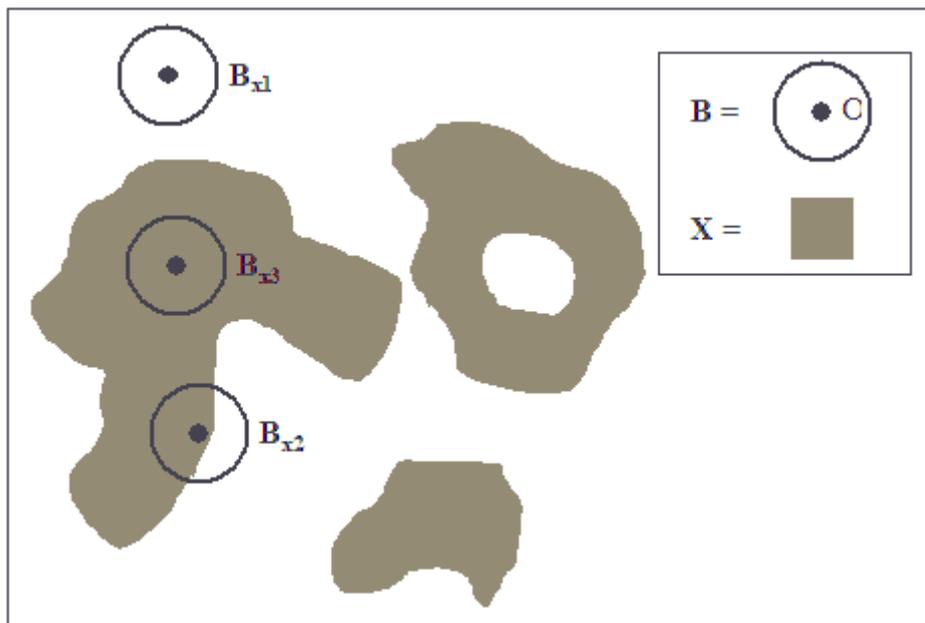


Figure 1 : Ensemble et élément structurant.

Ces opérateurs définis par G. Matheron et J. Serra permettent de construire tous les autres opérateurs morphologiques (au moins dans l'espace continu  $R^n$ ). Cependant ils ont montré que la dilatation et l'érosion sont liés par une relation très simple à l'addition et la soustraction de Minkowski.

Par ailleurs, ces auteurs se sont mis dans un cadre mathématique bien précis :

- Les ensembles  $X$  analysés et les opérateurs utilisés pour les transformer sont définis dans un *espace métrique totalement ordonné* (treillis).
- Les relations de proximités entre les objets imposent de définir une *topologie sur l'espace des fermés* de  $R^n$ .

L'extension aux fonctions a été faite en introduisant la notion de sous-graphe ou ombre d'une fonction.

## 4. Plan du cours

Le cours dédié à la morphologie mathématique peut s'articuler de la manière suivante. Les deux premiers chapitres serviront à introduire les outils mathématiques nécessaires en morphologie mathématique.

- Le chapitre 1 « Ensembles et images » traite des opérateurs usuels et de leurs propriétés en théorie des ensembles et introduit la notion de treillis et d'ombre d'une fonction ce qui conduit à la représentation ensembliste d'une image.
- Le chapitre 2 « Notions de topologie » permet d'introduire la notion de continuité et de limite et de définir les différentes notions topologiques générales (ouvert, fermé...) ou caractérisant les surfaces.

Le troisième chapitre est un chapitre de transition vers la morphologie mathématique proprement dite. Celle-ci ne peut se pratiquer qu'avec des moyens informatiques et donc dans un cadre numérique.

- Le chapitre 3 « Géométrie discrète et images » présente les différents problèmes rencontrés lors du passage de l'espace continu à l'espace discret. On introduit ainsi les différents pavages et maillages.

A partir du quatrième chapitre, on aborde directement la morphologie mathématique. La suite du cours se déroulera de la manière suivante :

- Le chapitre 5 « Erosions, dilatations et transformations associées » présente les opérateurs de base croissant (érosion et dilatation) et un résidu (le gradient). On y associe pour conclure la notion de fonction distance.
- Le chapitre 6 « Ouverture, fermeture et transformations associées » continue la présentation de la morphologie mathématique dans le même esprit avec d'abord les opérateurs croissants et la transformation chapeau haut de forme résidu sur une ouverture ou une fermeture. Le chapitre se termine sur la notion de granulométrie étroitement liée à l'ouverture ou à la fermeture.
- Chapitre 7 « Méthodes géodésiques en morphologie mathématique » L'espace euclidien n'est pas le seul qu'on puisse utiliser en morphologie mathématique. C'est pourquoi on introduit la notion de distance géodésique qui permet de construire l'érosion et surtout la dilatation géodésique. A partir de ces briques de base les méthodes de reconstruction pour les ensembles et les fonctions seront présentées comme des outils importants.
- Avec le chapitre 8 « Squelette, squelette par zone d'influence et ligne de partage des eaux » on aborde des transformations qui préservent plus ou moins la topologie initiale.
- Chapitre 9 « Traitement d'images et mesures en connaissance locale ». La morphologie mathématique est souvent utilisée pour l'analyse. Ceci introduit un certain nombre de contraintes de connaissance locale qui se traitent bien par morphologie mathématique. Ensuite les mesures issues de la morphologie mathématique sont présentées.
- Chapitre 10 « Les modèles probabilistes et la morphologie mathématique » Ce chapitre montre la puissance de la morphologie mathématique pour construire des structures modèles pouvant décrire des structures aléatoires réelles.

---

<sup>1</sup> G. Matheron *Les variables régionalisées et leur estimation*. Masson Paris 1965.

- <sup>2</sup> G. Matheron *Pour une théorie des milieux poreux*. Masson Paris 1967.
- <sup>3</sup> J. Serra *Introduction à la morphologie mathématique*. Les cahiers du C.M.M. Fontainebleau 1969.
- <sup>4</sup> G. Matheron *Random Set and Integral Geometry*. J. Wiley London 1975.
- <sup>5</sup> J. Serra *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press London 1982.
- <sup>6</sup> C. Lantuejoul, J. Serra I.E.E.E. Int. Conf. on Acoustic, Speech and Signal Processing. 1982 p2063.
- <sup>7</sup> J. Serra *Image Analysis and Mathematical Morphology : Theoretical Advances*. Academic Press London 1989.
- <sup>8</sup> M. Coster, J.L. Chermant *Précis d'analyse d'images*. Presses du CNRS Paris 1989 2ème Ed.
- <sup>9</sup> M. Schmitt, J. Mattioli *Morphologie Mathématique*. Masson Paris 1993.
- <sup>10</sup> S.R. Sternberg Proc. 3rd Int. IEEE Comprec, Chicago 1979.
- <sup>11</sup> C.R. Giardina, E. R. Dougherty *Morphological Methods in Image and Signal Processing*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- <sup>12</sup> Heijmans H.J.A.M. *Morphological image operators*. *Advances in Electronics and Electron Physics*, suppl. 24, Vol. 50, Hawkes P. ed., Ac. Press, Boston 1994.
- <sup>13</sup> Soille P. *Morphological image analysis*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1999.
- <sup>14</sup> Soille P. *Morphologische Bildverarbeitung*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1998.
- <sup>15</sup> B. Laÿ, C. Lantuejoul *Description of Morpholog*. Ecole des Mines Nov. 1983.