NOTIONS DE TOPOLOGIE

Dans le chapitre précédent nous avons dit qu'il était indispensable d'introduire des notions de topologie pour disposer des outils mathématiques nécessaires. La topologie est indissociable de *la notion de continuité et de limite*. Nous allons faire quelques rappels sur ces concepts.

1. Notion de continuité et de limite

1.1 Notion de continuité

Les notions de continuité et de limite sont bien connues et souvent illustrées en géométrie élémentaire par la description de la notion de tangente à une courbe (figure 1).

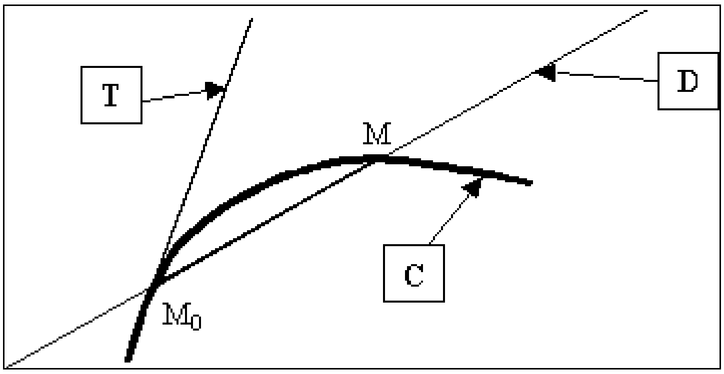

Figure 1 : Tangente à une courbe.

Soit T, la tangente en M_0 à une courbe C et soit M un autre point de cette courbe. M_0M définit une corde supportée par la droite D. Faisons varier M de manière continue pour faire approcher D de T.

L'application *f* de X dans Y est continue en x_0 si : x voisin de x_0 entraîne *f*(x) voisin de *f*(x_0). L'application *f* de X– x_0 a une limite y_0 si : x assez voisin de x_0 entraîne *f*(x) voisin de y_0.

Nous devons maintenant préciser la notion de limite en prenant l'exemple sur les suites numériques.

1.2 Limite inférieure et limite supérieure d'une suite numérique

En mathématique, la notion de continuité est indissociable de celle de limite. En effet, considérons une suite de nombre u_n. Formons, à partir de cette suite la suite V_n telle que :

$$V_n = \vee_{p\geq n}\left(u_p\right)$$

Cette suite décroissante converge vers une limite lorsque n croît. On peut alors définir une *limite supérieure* qui n'est autre que la borne inférieure :

$$\overline{\lim}\left(u_n\right) = \wedge_n\left(V_n\right) = \wedge_n\left(\vee_{p\geq n}\left(u_p\right)\right)$$

Pour les mêmes raisons, on définit la limite inférieure :

$$\underline{\lim}\left(u_n\right) = \vee_n\left(\wedge_{p\geq n}\left(u_p\right)\right)$$

Ainsi, pour la suite définie par :

$$u_n = \left(-1\right)^n$$

La valeur –1 représente la limite inférieure et la valeur +1 la limite supérieure. Les limites supérieures et inférieures peuvent évidemment être étendues aux suites de fonctions. Nous verrons plus loin que l'extension aux ensembles est un peu plus complexe.

2. Notion de voisinage

Revenons à l'exemple géométrique. Il faut se donner un moyen pour savoir si deux points sont voisins ou assez voisins. Il semble donc naturel d'utiliser à cet effet la notion de distance entre points. Ce point de vue est suffisant pour les problèmes de géométrie, mais reste insuffisant dans le cas général. On va donc introduire la notion d'espace topologique.

2.1 Espace topologique et voisinage

Soit x un élément de **E** et soit **V**(x), un sous-ensemble de **E** appelé voisinage de x. Si pour tout élément de **E**, on peut définir un voisinage, alors **E** *sera un espace topologique* et l*es éléments seront appelés points*.

On impose aux voisinages de vérifier les quatre conditions suivantes :

- Tout voisinage de x contient x.
- Tout sous ensemble de **E** qui contient un voisinage de x est un voisinage de x.
- L'intersection d'un nombre fini de voisinage de x est un voisinage de x.
- Pour tout voisinage **V**(x), il existe un voisinage **V'** tel que **V** soit voisinage de chacun des points de **V'**.

Ceci permet d'introduire la notion d'ouvert topologique.

2.2 Notion d'ouverts et fermés topologiques

2.2.1 Définition

On dit qu'un sous-ensemble **X** de l'ensemble **E** est *ouvert*, si et seulement si, il est voisinage de chacun de ces points.

2.2.2 Ouvert topologique et espace topologique

On peut alors reformuler d'une autre manière la définition d'un espace topologique. On appelle espace topologique, tout couple constitué par un ensemble **E** et un ensemble de parties de **E**, appelés ouverts de **E** et notés ***G*(E)**, qui vérifient les axiomes suivants :

- Toute réunion d'ouverts est un ouvert.
- L'intersection de deux ouverts est un ouvert.
- L'ensemble **E** et l'ensemble vide $\varnothing$ sont ouverts.

Remarques :

- On peut donc définir, de manière équivalente, l'espace topologique à partir des ouverts ou du voisinage.
- Le sens donné au terme « voisinage » semble différent de celui donné par le langage courant puisque tout point x a de nombreux voisinages, y compris l'espace topologique **E** lui-même. En fait, on n'a pas besoin de connaître tous les voisinages de x mais seulement un certain nombre. Cette partie de **V**(x) est appelée base de voisinage de **V**(x) et notée ***B***.

Exemple :

Avec n $\in$ $\mathbf{N}^{+}$ et ***R*** muni de la topologie usuelle ***B***(x) est une base de voisinage de x.

$$\boldsymbol{B}(x) = \left]x - \frac{1}{n}; x + \frac{1}{n}\right[$$

Ce que l'on vient de dire peut s'étendre à d'autres espaces comme $\mathbf{R}^n$.

2.2.3 Fermés topologiques

2.2.3.1 Définition

On appelle fermé d'un espace topologique toute partie de **E** *dont le complémentaire est ouvert*. Il en résulte immédiatement de la définition des ouverts de **E**, par passage au complémentaire, les propriétés suivantes :

- Toute intersection de fermés est un fermé.
- L'union de deux fermés est un fermé.
- **E** et $\emptyset$ sont des fermés.

L'ensemble de parties de **E**, appelés fermés de **E** est notée ***F*(E)**,

2.2.4 Intérieur, adhérence et frontière

2.2.4.1 Intérieur

Soit **X** une partie de **E**. Un point $x \in \mathbf{E}$ est dit *intérieur à* **X** si et seulement si $\mathbf{X} \in \mathbf{V}(x)$. On appelle intérieur de **X**, l'ensemble des points de **E** intérieurs à **X**. L'intérieur de **X** est noté **int**(**X**). Il en résulte que **int**(**X**) est l'union de tous les ouverts inclus dans **X**. *C'est donc le plus grand des ouverts contenus dans* **X**. On a également les propriétés suivantes :

- $\mathbf{int}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{X}$
- $\mathbf{int}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{X}$ (ouvert)
- propriété d'idempotence : $\mathbf{int}(\mathbf{int}(\mathbf{X})) = \mathbf{int}(\mathbf{X})$
- propriété de croissance : $\mathbf{X} \subset \mathbf{Y} \Rightarrow \mathbf{int}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{int}(\mathbf{Y})$
- distributivité par rapport à l'intersection : $\mathbf{int}(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}) = \mathbf{int}(\mathbf{X}) \cap \mathbf{int}(\mathbf{Y})$
- $(\mathbf{int}(\mathbf{X}) \cup \mathbf{int}(\mathbf{Y})) \subset \mathbf{int}(\mathbf{X} \cup \mathbf{Y})$

2.2.4.2 Adhérence

Soit **X** une partie de **E**. Un point $x \in \mathbf{E}$ est dit *adhérent à* **X** si et seulement si $\forall\ \mathbf{V} \in \mathbf{V}(x) \Rightarrow \mathbf{X} \cap \mathbf{V} \neq \emptyset$. On appelle adhérence de **X**, l'ensemble des points de **E** adhérents à **X**. L'adhérence de **X** est notée **adh**(**X**). *C'est le plus petit des fermés contenant* **X**. On a également les propriétés suivantes :

- $\mathbf{X} \subset \mathbf{adh}(\mathbf{X})$
- $\mathbf{adh}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{X}$ (fermé)
- propriété d'idempotence : $\mathbf{adh}(\mathbf{adh}(\mathbf{X})) = \mathbf{adh}(\mathbf{X})$
- propriété de croissance : $\mathbf{X} \subset \mathbf{Y} \Rightarrow \mathbf{adh}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{adh}(\mathbf{Y})$
- distributivité par rapport à l'union : $\mathbf{adh}(\mathbf{X} \cup \mathbf{Y}) = \mathbf{adh}(\mathbf{X}) \cup \mathbf{adh}(\mathbf{Y})$
- $\mathbf{adh}(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}) \subset (\mathbf{adh}(\mathbf{X}) \cap \mathbf{adh}(\mathbf{Y}))$

2.2.4.3 Frontière

Soit **X** une partie de **E**. Un point $\mathbf{p} \in \mathbf{E}$ est dit « *point frontière* » de **X** si :

$$\forall\, \mathbf{p} \in \mathbf{V}(x) : \mathbf{p} \cap \mathbf{X} \neq \emptyset \;\; et\; \mathbf{p} \cap \mathbf{X}^C \neq \emptyset$$

On appelle frontière, l'ensemble des points x qui vérifient cette relation. La frontière de **X** s'écrit : $\mathbf{Fr}(\mathbf{X}) = \partial\mathbf{X}$. Elle correspond à la différence symétrique entre l'adhérence de **X** et l'intérieur de **X**.

$$\mathbf{Fr}(\mathbf{x}) = \partial\mathbf{X} = \mathbf{adh}(\mathbf{X}) / \mathbf{int}(\mathbf{X})$$

Comme on a :

$$\partial\mathbf{X} = \mathbf{adh}(\mathbf{X}) \cap \mathbf{adh}(\mathbf{X}^{\mathbf{C}}) = \mathbf{adh}(\mathbf{X}) \cap (\mathbf{int}(\mathbf{X}))^{\mathbf{C}} = \complement_{\mathbf{adh}(\mathbf{X})}(\mathbf{int}(\mathbf{X}))$$

la frontière est un fermé. Cela a une grande importance en morphologie.

3. Application de la notion de continuité et de limite aux ensembles

Nous avons défini la notion de limite en donnant un exemple sur une suite numérique et avons indiqué que cela s'étendait facilement au cas des suites de fonctions. Par contre, l'extension aux ensembles est un peu plus complexe. Par souci de simplification, nous allons travailler dans le plan.

3.1 Retour sur la notion de distance

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit la notion d’espace métrique et la notion de distance entre points avec ses propriétés. On peut généraliser cette définition en introduisant la distance d’un point à un ensemble puis, la distance euclidienne entre deux ensembles.

3.1.1 Distance d’un point à un ensemble

La distance d’un point **x** à l’ensemble **Y** est définie comme étant la distance entre **x** et le point de **Y** le plus proche de **x**. On a donc :

$$\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{Y}) = \operatorname*{Inf}_{\mathbf{y}\in\mathbf{Y}}(\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y}))$$

Ceci peut être visualisé sur la figure 2.

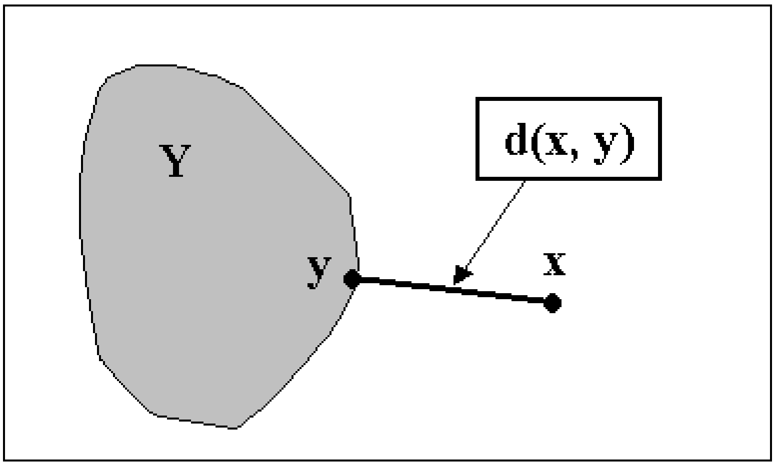

Figure 2 : Distance d’un point à un ensemble.

3.1.2 Distance euclidienne entre deux ensembles

La notion de distance peut prendre plusieurs formes lorsqu’on parle de distance entre deux ensembles. Ici nous ne définissons que la distance euclidienne entre deux ensembles. Par extension de la définition précédente on peut écrire :

$$\mathrm{d}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \operatorname*{Inf}_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}\ et\ \mathbf{y}\in\mathbf{Y}}(\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y}))$$

3.2 Définition de la limite d'une suite d'ensemble

Soit ($\mathbf{Y_n}$) une suite d'ensemble de $\mathbf{R}^2$, on dira que ($\mathbf{Y_n}$) tend vers $\mathbf{Y}$ si pour tout point x, on a :

$$\lim_{n\to\infty} d(\mathbf{x},\mathbf{Y_n}) = d(\mathbf{x},\mathbf{Y}) \quad \text{(équation 1)}$$

- Exemple 1 :

Soit $\mathbf{y}_n$ une suite de points qui converge vers le point $\mathbf{y}$. Désignons par $\mathbf{Y_n} = \{y_n\}$ l'ensemble réduit au point $\mathbf{y_n}$. On a alors :

$$\lim_{n\to\infty} d(\mathbf{x},\mathbf{Y_n}) = \lim_{n\to\infty} d(\mathbf{x},\mathbf{y_n}) = d(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

Ceci montre que $\mathbf{Y_n}$ converge vers $\mathbf{Y} = \{y\}$. La convergence ensembliste est donc compatible avec la convergence ponctuelle, ce qui est satisfaisant.

- Exemple 2 :

Définissons une suite d'ensembles $\mathbf{Y_n} = \{\ \mathbf{y}\ ;\ d(\mathbf{z},\mathbf{y}) \leq 1\text{-}1/n\}$, c'est à dire, par exemple une suite de disques de centre $\mathbf{z}$ et de rayon r = 1-1/n, (figure 3).

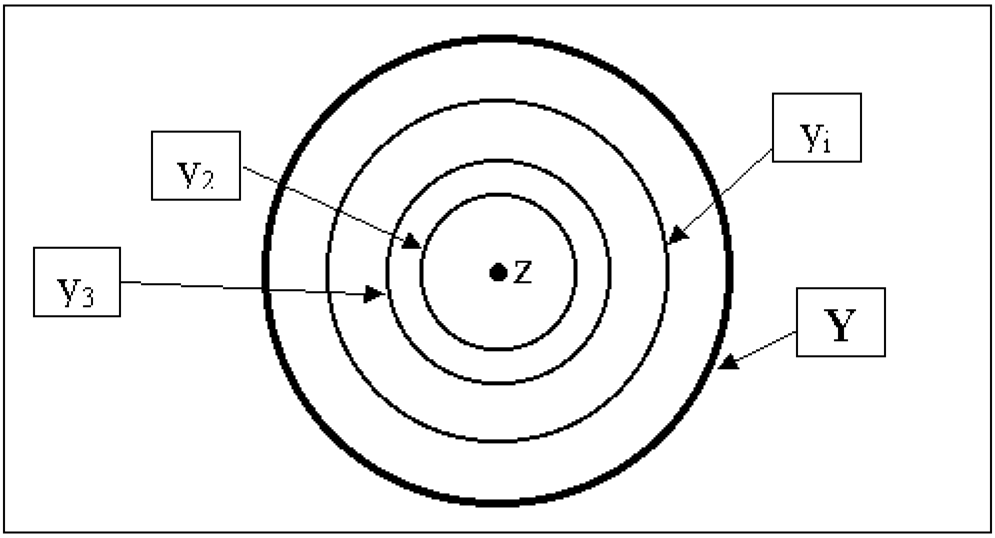

Figure 3 : Suite d'ensembles $\mathbf{Y_n} = \{x\ ;\ d(z,y) \leq 1\text{-}1/n\ \}$.

Y_n est une suite d'ensembles croissants et l'on est en droit d'attendre que :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{Y_n} = \bigcup_n \mathbf{Y_n} = \{\mathbf{y} : d(\mathbf{z},\mathbf{y}) < 1\}$$

Cet ensemble vérifie bien l'équation 1. Il n'est toutefois pas le seul. Ainsi l'ensemble :

$$\mathbf{Y} = \{\mathbf{y} : d(\mathbf{z},\mathbf{y}) \leq 1\}$$

vérifie aussi cette équation.

Cette absence d'unicité est assez troublante. En fait, ce n'est que l'émergence d’une circonstance tout à fait générale. Les ensembles du plan constituent une famille fort riche, trop riche même pour représenter de manière vraiment adéquate les objets d'une image. Il faut donc restreindre cette famille.

3.3 La famille des fermés

Pour parvenir à une telle restriction, plusieurs choix sont possibles. Parmi les plus intéressants, l'un d'entre eux consiste à ne considérer que l'ensemble le plus grand parmi les solutions de l'équation 1. *Il n'est pas difficile de voir que ce choix revient implicitement à ne garder que les ensembles fermés*.

Nous avons déjà vu que la famille des fermés $\boldsymbol{F}$ est stable par union et intersection. Dans $\mathbf{R}^2$, elle contient l'ensemble vide, les points isolés, les frontières, les disques fermés ($\mathbf{y}$; d($\mathbf{z}$,$\mathbf{y}$) $\leq \lambda$) ...

3.4 Opérateurs classiques et continuité

3.4.1 Continuité de la réunion

Montrons par exemple que la réunion est continue sur $\boldsymbol{F}$. Soit $\boldsymbol{F}_0$ un fermé fixe et soit ($\boldsymbol{F}_n$) une suite de fermés qui converge vers le fermé $\boldsymbol{F}$ (par exemple, la suite de fermés de la figure 3). Si $\mathbf{x}$ est un point quelconque du plan, on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\mathrm{d}\left(\mathbf{x},\boldsymbol{F}_\mathbf{n}\cup\boldsymbol{F}_\mathbf{0}\right)\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\inf\left[\mathrm{d}\left(\mathbf{x},\boldsymbol{F}_\mathbf{n}\right),\mathrm{d}\left(\mathbf{x},\boldsymbol{F}_\mathbf{O}\right)\right]\right)\\
&= \inf\left(\lim_{n\to\infty}\left[\mathrm{d}\left(\mathbf{x},\boldsymbol{F}_\mathbf{n}\right),\mathrm{d}\left(\mathbf{x},\boldsymbol{F}_\mathbf{O}\right)\right]\right)\\
&= \inf\left[\mathrm{d}\left(\mathbf{x},\boldsymbol{F}\right),\mathrm{d}\left(\mathbf{x},\boldsymbol{F}_\mathbf{O}\right)\right]\\
&= \mathrm{d}\left(\mathbf{x},\boldsymbol{F}\cup\boldsymbol{F}_\mathbf{0}\right)
\end{aligned}$$

3.4.2 Non-continuité de l’intersection

En revanche, l'intersection n'est pas continue. En guise de contre exemple, désignons par $\mathbf{O}$ l'origine du plan et considérons une suite de points ($\mathbf{y}_n$) qui converge vers $\mathbf{O}$, les $\mathbf{y}_n$ étant tous distincts de $\mathbf{O}$.

Posons $\boldsymbol{F}_n = \{\mathbf{y}_\mathbf{n}\}$, ainsi $\boldsymbol{F}_0 = \{\mathbf{O}\}$ de sorte que :

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{F}_\mathbf{n} = \boldsymbol{F}_\mathbf{0}$$

$$\text{alors}\quad \mathrm{d}\left(\mathbf{x},\boldsymbol{F}_\mathbf{n}\cap\boldsymbol{F}_\mathbf{0}\right) = \mathrm{d}\left(\mathbf{x},\varnothing\right) = +\infty$$

$$\text{tandis que}\qquad \mathrm{d}\left(\mathbf{x},\boldsymbol{F}_\mathbf{0}\right) < +\infty$$

3.4.3 Définition de la semi-continuité supérieure et semi-continuité inférieure

Toutefois l'intersection vérifie une propriété de même nature que la continuité, mais un peu plus restrictive : il s'agit de la semi-continuité. Précisons un peu cette notion.

Soit ($\boldsymbol{F}_n$) une suite de fermés du plan. Par analogie avec ce qu'on a dit pour les suites numériques, *on appelle limite supérieure et limite inférieure des* $\boldsymbol{F}_n$ *l'union et l'intersection de toutes les sous-suites des* $\boldsymbol{F}_n$ *qui convergent*. Les limites supérieures et inférieures sont notées respectivement : $\overline{\lim}\left(\boldsymbol{F}_\mathbf{n}\right)$ et $\underline{\lim}\left(\boldsymbol{F}_\mathbf{n}\right)$

Par exemple, soient y et z deux points distincts du plan. Posons $\boldsymbol{F}_n = \{\mathbf{y}\}$ si n est pair et $\boldsymbol{F}_n = \{\mathbf{z}\}$ si n est impair. Dans ce cas, on a :

$$\overline{\lim}\left(\boldsymbol{F}_\mathbf{n}\right) = \{\mathbf{y},\mathbf{z}\}$$

$$\underline{\lim}\left(\boldsymbol{F}_\mathbf{n}\right) = \varnothing$$

$$\text{avec}\quad \underline{\lim}\left(\boldsymbol{F}_\mathbf{n}\right) \subset \overline{\lim}\left(\boldsymbol{F}_\mathbf{n}\right)$$

Pour caractériser les limites supérieure et inférieure, un critère très simple a été proposé par Georges Matheron :

- $\mathbf{x} \in \overline{\lim}(\boldsymbol{F_n})$ si tout disque de centre x et de rayon non nul rencontre une infinité de $\boldsymbol{F}_n$.
- $\mathbf{x} \in \underline{\lim}(\boldsymbol{F_n})$ si tout disque de centre x et de rayon non nul rencontre tous les $\boldsymbol{F}_n$ à partir d'un certain rang.

Soit alors Ψ une transformation définie sur ***F*** à valeur dans ***F***. On dit que Ψ *est semi-continue supérieurement* pour tout fermé ***F*** et toute suite ($\boldsymbol{F}_n$) qui converge vers ***F*** si :

$$\Psi(\boldsymbol{F}) \supset \overline{\lim}\, \Psi(\boldsymbol{F_n})$$

On dit que Ψ *est semi-continue inférieurement* pour tout fermé ***F*** et toute suite ($\boldsymbol{F}_n$) qui converge vers ***F*** si :

$$\Psi(\boldsymbol{F}) \subset \underline{\lim}\, \Psi(\boldsymbol{F_n})$$

Bien entendu, *si la transformation est à la fois semi-continue inférieurement et supérieurement, elle est continue*.

3.4.4 Semi-continuité supérieure de l'intersection

Soit ***F*** un fermé et soit ($\boldsymbol{F}_n$) une suite de fermés qui converge vers ***F***. Il faut établir que :

$$\boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{F_0} \supset \overline{\lim}(\boldsymbol{F_n} \cap \boldsymbol{F_0})$$

Soit $\mathbf{y} \in \overline{\lim}(\boldsymbol{F_n} \cap \boldsymbol{F_0})$, tout disque centré en y et de rayon non nul rencontre un nombre infini de $\boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{F}_0$, donc a fortiori un nombre infini des $\boldsymbol{F}_n$ si bien que l'on a :

$$\mathrm{y} \in \overline{\lim}\, \boldsymbol{F_n} = \boldsymbol{F}$$

Par ailleurs $\mathbf{y} \in \boldsymbol{F}_n \cap \boldsymbol{F}_0$ entraîne $\mathrm{y} \in \boldsymbol{F}_0$. On a donc bien $\mathbf{y} \in \boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{F}_0$ et la continuité supérieure est établie.

3.4.5 Semi-continuité inférieure de la complémentation

La complémentation d'un fermé n'est en général pas fermée. Il faut associer à chaque fermé ***F*** *le plus petit fermé* contenant le complémentaire $\boldsymbol{F}^C$ de ***F***. Une telle transformation n'est pas continue. La figure 4a illustre le cas de deux carrés convergeant l'un vers l'autre puisque situé à une distance 1/n. L'ensemble limite ***F*** est représenté sur la figure 4b. La limite inférieure de la suite est représentée sur la figure 4c. Puisque à chaque fermé $\boldsymbol{F}_n$ il faut associer l*e plus petit fermé* contenant le complémentaire $\boldsymbol{F}^C$ de $\boldsymbol{F}_n{}^C$, cette limite comporte tout l'espace des carrés jointifs plus la frontière commune aux deux carrés. Par contre, le plus petit fermé contenant le complémentaire de la limite ne contient pas la frontière commune (figure 4d). On a donc :

$$\overline{\boldsymbol{F}^{\mathbf{C}}} \subset \underline{\lim}(\boldsymbol{F_n^{\mathbf{C}}})$$

avec $\overline{\boldsymbol{F}^{\mathbf{C}}}$ plus petit fermé du complémentaire.

La complémentation est semi-continue inférieurement.

3.4.6 Semi-continuité inférieure de la frontière d'un fermé

Le même raisonnement sur la même suite définie par la figure 4a peut être tenu sur la frontière d'un fermé.

$$\partial F = \overline{F \cap F^C}$$

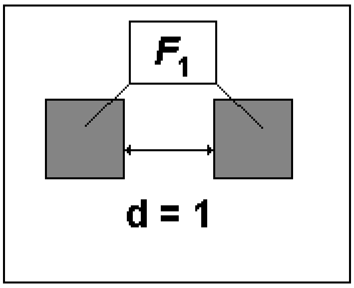

Figure 4a

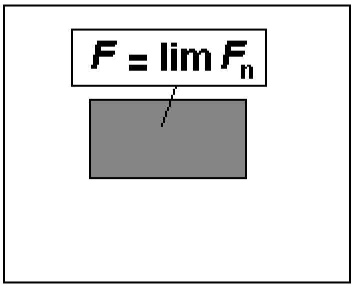

Figure 4b

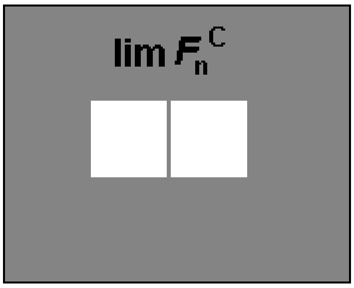

Figure 4c

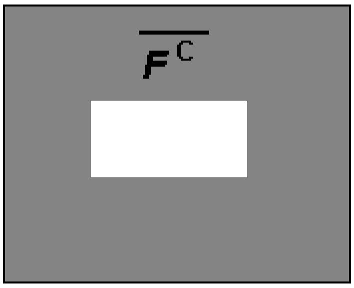

Figure 4d

4. Autres notions relatives à la topologie

4.1 L'homéomorphisme

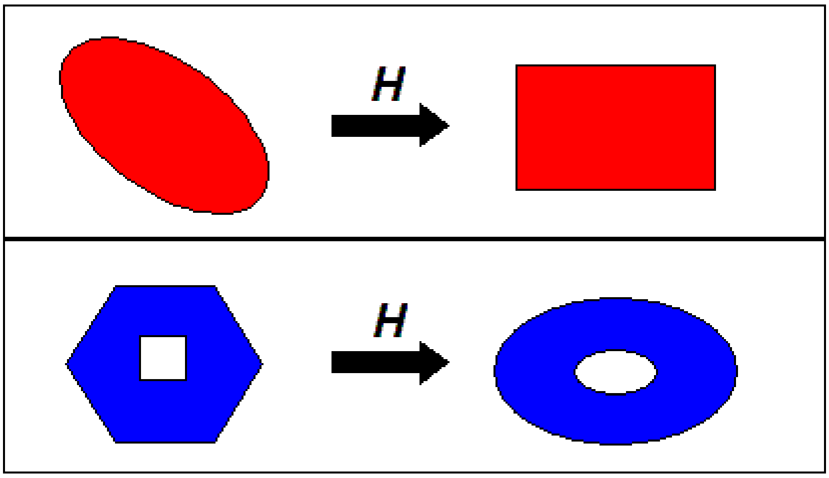

Figure 5 : Principe de l'homéomorphisme.

L'homéomorphisme est une notion importante en topologie pour les applications à l'image. Considérons les surfaces représentées par la figure 5. On note qu'il existe des analogies entre certaines surfaces. En particulier, en déformant de manière continue la première surface, on peut tendre vers la forme de la seconde surface. Cette approche est du domaine de la topologie. L'exemple que nous venons de présenter est une application de *l'espace topologique* **X** dans *l'espace topologique* **Y** appelée homéomorphisme.

Un homéomorphisme est une transformation bijective et bi-continue. Elle traduit un peu la notion de réversibilité en thermodynamique. Cette notion de réversibilité est importante : en effet le bouchage d'un trou n'est pas une transformation homéomorphe, car la transformation inverse n'est pas continue.

4.2 La connexité

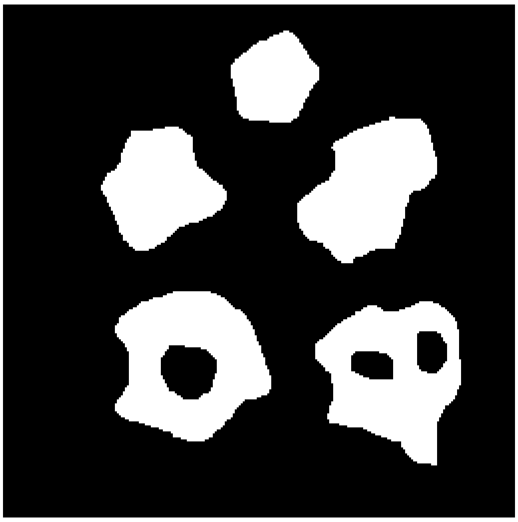

Figure 6 : Ensemble de particules.

Considérons maintenant la figure 6, elle est composée de plusieurs objets formant un ensemble. La connexité est la notion mathématique qui est associée à la réalité physique d'un objet. On peut dire qu'un ensemble **X** est connexe si à toute paire de points **x** et **y** appartenant à **X**, on peut faire correspondre un chemin totalement inclus dans **X**, (figure 7).

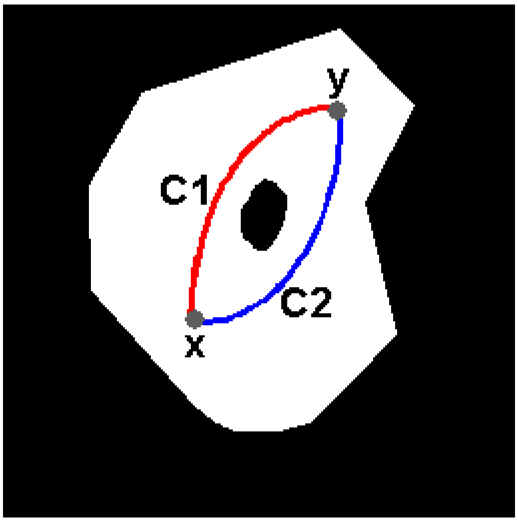

Figure 7 : Ensemble connexe.

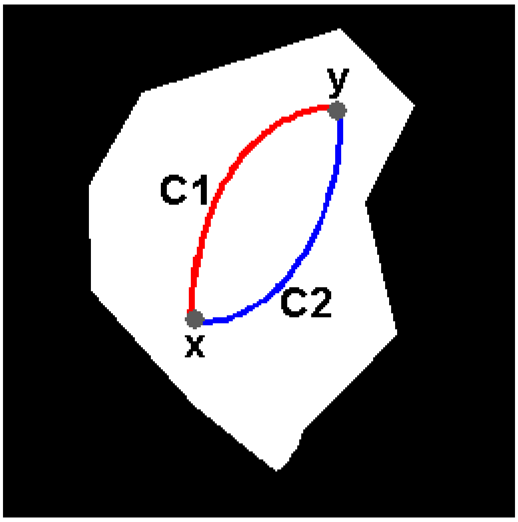

Figure 8 : Ensemble simplement connexe.

Parmi les ensembles connexes, on distingue les ensembles simplement connexes des autres. Pour savoir si un ensemble est simplement connexe, il faut toujours se donner une paire de points **x** et **y** appartenant à **X** et se définir deux chemins quelconques $\mathbf{C_1}$ et $\mathbf{C_2}$. *Si, quel que soit les deux points, il est possible de faire coïncider les deux chemins par un homéomorphisme, l'ensemble* **X** *est dit simplement connexe* (figure 8).

4.3 Caractéristiques d'une surface

C'est en connaissant les caractéristiques des surfaces que l'on peut vérifier si on peut effectuer un homéomorphisme pour passer de l'une à l'autre. Les surfaces sont caractérisées par leur orientation, leur genre et leur bord.

4.3.1 Orientation d'une surface

Une surface est dite orientable si en partant d'un point d'une courbe fermée faisant le tour de la surface, on revient du même coté de la surface (figure 9).

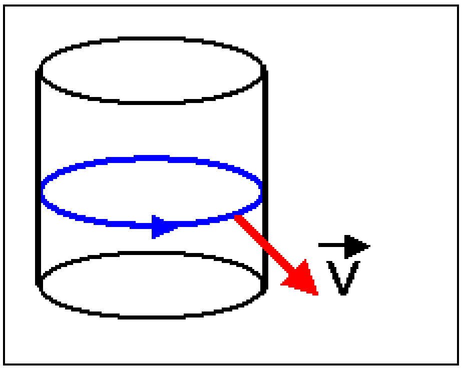

Figure 9 : Surface orientée.

La *sphère*, *le tore* et toutes les autres combinaisons donnent des surfaces orientables. La bande de Mobiüs est une exception (figure 10). Ce type de figure n'a qu'un intérêt mathématique. Pour les matériaux réels cette situation ne se rencontre pratiquement pas et pourra être omise. Par défaut, les surfaces dans $\mathbf{R}^3$ sont donc orientables.

Dans $\mathbf{R}^2$ *toutes les surfaces sont orientables*.

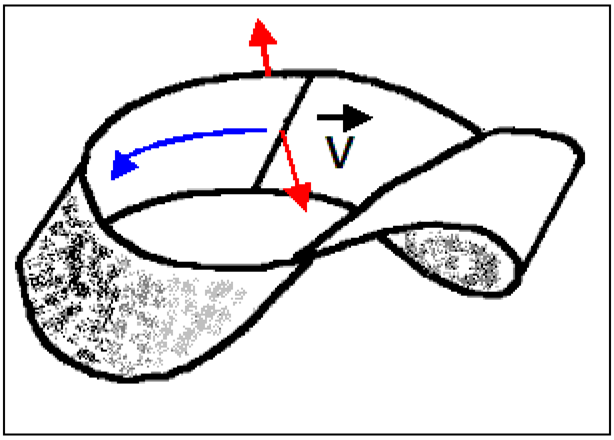

Figure 10 : Bande de Mobiüs.

4.3.2 Genre d'une surface

Si l'on découpe une surface connexe **S** le long d'une courbe simple C, il peut arriver que la surface ainsi obtenue soit encore connexe (cas du tore découpé selon un cercle méridien (figure 11)) ou il peut arriver que la surface soit partagée en deux morceaux (cas de la surface sphérique (figure 12)). On appelle genre d'une surface g(**S**), le nombre maximal de coupures que l'on puisse faire en maintenant la connexité de la surface, (figure 13).

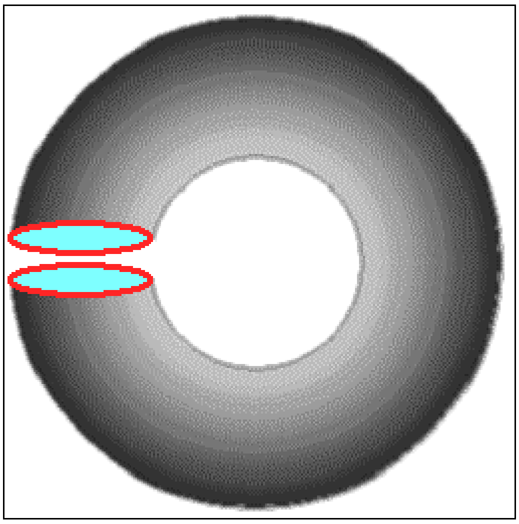

Figure 11 : Tore.

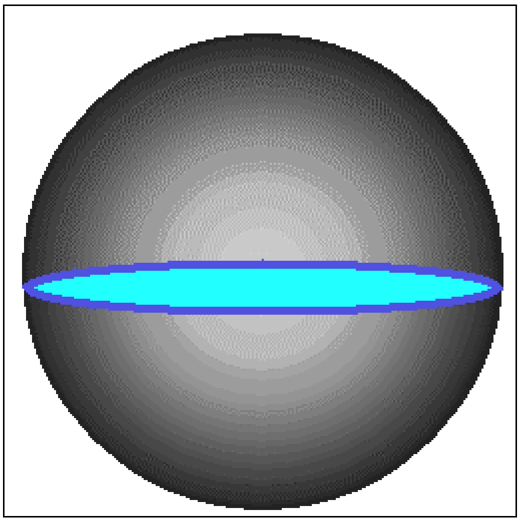

Figure 12 : Sphère.

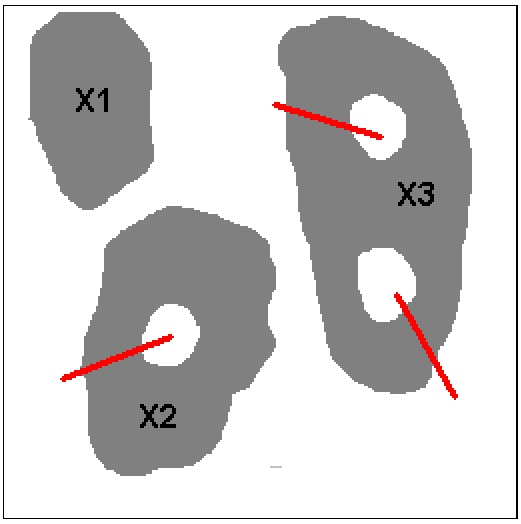

Figure 14 : Genre d'une surface.

L'analyse des figures 11 à 14 permet de dresser le tableau suivant :

	Figure	**Genre**
Espace $\mathbf{R}^3$	Tore	g(tore) = 1
	Sphère	g(sphère) = 0
Espace $\mathbf{R}^2$	Surface sans trou **X1**	g(**X1**) = 0
	Surface avec 1 trou **X2**	g(**X2**) = 1
	Surface avec 2 trous **X3**	g(**X3**) = 2

On remarque que dans $\mathbf{R^2}$ le genre de la surface est égal au nombre de trous.

4.3.4 Bord d'une surface

A moins d'occuper tout l'espace de référence **E**, une surface de $\mathbf{R^2}$ possède au moins un bord (**X1** dans la figure 14), c'est à dire une courbe la limitant. Par contre une surface sphérique ou une surface torique ne possède pas de bord.

4.3.5 Théorème

Avec ces trois notions topologiques, on peut énoncer le théorème suivant :

Pour que deux surfaces soient homéomophes, il faut et il suffit qu'elles soient toutes les deux orientables ou non orientables, qu'elles aient même genre et même nombre de bord.

4.4 Propriétés topologiques

Ce que nous venons de dire sur la connexité et l'homéomorphisme permet de définir deux propriétés des transformations d'images ensemblistes.

- Préservation de la connexité
- Homotopie

4.4.1 Préservation de la connexité

Par exemple lorsqu'on bouche les trous d'une surface dans $\mathbf{R^2}$, tous les points connexes issus de la surface initiale restent connexes. On ne fait que rajouter des points connexes.

4.4.2 Homotopie

En terme de transformation d'images, on dit que celle ci est *homotopique* si l'ensemble d'arrivée est homéomorphe de l'ensemble de départ. Ainsi un objet troué doit rester avec le même nombre de trous. On en déduit immédiatement que le bouchage de trous n'est pas une transformation homotopique.

4.4.3 Propriétés topologiques des opérateurs ensemblistes de base

4.4.3.1 L'union

Par union, ce qui était connexe dans chaque ensemble reste connexe dans l'union. Par contre, des surfaces ont pu se connecter et des trous disparaître. *L'union préserve la connexité mais n'est pas homotopique.*

4.4.3.2 L'intersection

L'intersection peut détruire la connexité et ne pas préserver l'homotopie.

Les autres opérateurs de bases ne possèdent aucune de ces propriétés.