

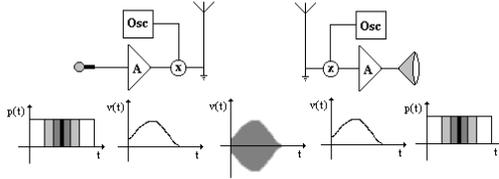
Traitement du signal

Le signal est le véhicule de l'intelligence dans les systèmes :

- il transporte **les ordres** dans les équipements de contrôle et de télécommande,
- il **achemine** la parole ou l'image **sur les réseaux d'information**.

Le **traitement du signal** est la science de :

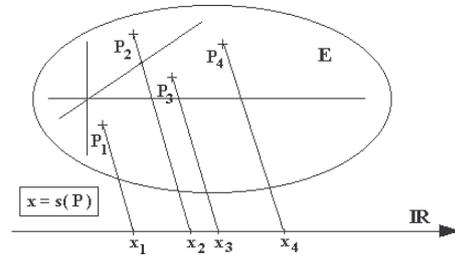
1. l'observer, le mesurer, en utilisant **des capteurs**.
2. le transporter en utilisant **des conditionneurs, des codeurs**.
3. le restituer le plus fidèlement possible en utilisant **des transducteurs**.



Définition d'un signal dans un contexte déterministe

Pour coordonner les actions au sein d'un processus matériel plus ou moins complexe, **des informations doivent être transmises entre les différents éléments du système.**

On parle alors de signaux :



Le signal est représenté sous forme d'une **fonction mathématique** qui associe **une propriété physique observée en un point de l'espace à une grandeur numérique.**

Classification physique des signaux

- Signaux temporels représentés par une fonction réelle du temps $s(t)$:

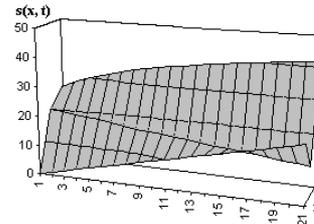


- Signaux spatiaux représentés par une fonction réelle du point : $s(x, y)$:



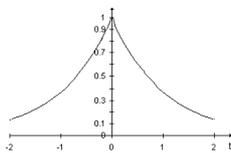
Classification physique des signaux

- Signaux multidimensionnels représentés par une fonction de plusieurs variables $s(x, t)$:

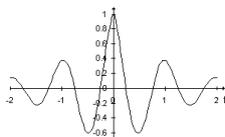


Signaux usuels

- Signal exponentiel décroissant $s(t) = \exp(-|t|)$:

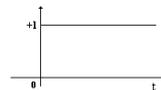


- Signal oscillatoire exponentiel décroissant $s(t) = \cos(\omega_p t) \cdot \exp(-|t|)$:



Signaux usuels

- Signal « échelon » ou fonction d'Heaviside $s(t) = u(t)$:

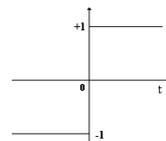


Formulation mathématique :

- pour $t < 0$, $u(t) = 0$
- pour $t \geq 0$, $u(t) = 1$

La fonction $u(t)$ intervient essentiellement comme facteur multiplicatif pour construire **un signal causal** (existant pour $t > 0$).

- Signal « signe » défini par $s(t) = \text{sgn}(t) = t/|t|$:

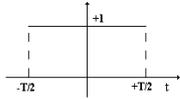


Formulation mathématique :

- $\text{sgn}(t) = -1 + 2 \cdot u(t)$

Signaux usuels

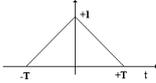
- Signal porte rectangulaire $s(t) = \text{rect}(t/T)$:



Exercice 1 : Trouvez la formulation mathématique.

Le signal $s(t) = \text{rect}(t/T)$ intervient comme **facteur multiplicatif pour localiser un signal quelconque sur l'intervalle de temps $[-T/2, +T/2]$.**

- Signal porte triangulaire $s(t) = \text{tri}(t/T)$:



Formulation mathématique :

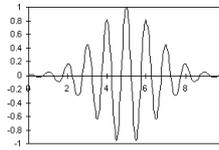
- pour $t \leq -T$, $\text{tri}(t/T) = 0$
- pour $-T \leq t \leq 0$, $\text{tri}(t/T) = (t + T)/T$
- pour $0 \leq t \leq T$, $\text{tri}(t/T) = (T - t)/T$
- pour $t \geq T$, $\text{tri}(t/T) = 0$

Exercice 2 : exprimez le signal porte triangle en utilisant la fonction d'Heaviside puis la fonction rectangle.

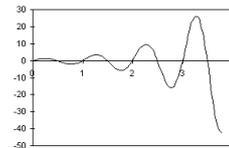
Classification énergétique des signaux

- L'énergie du signal $s(t)$ est définie par l'intégrale : $E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)^2 dt$

Les signaux à énergie finie



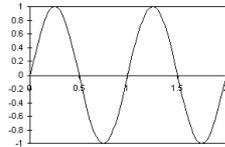
Les signaux à énergie infinie



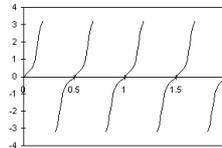
Classification énergétique des signaux

- La puissance du signal $s(t)$ est définie par l'intégrale : $P_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s(t)^2 dt \right]$

Les signaux périodiques à puissance moyenne finie

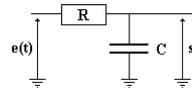


Les signaux périodiques à puissance moyenne infinie



Systèmes linéaires invariants

Le système permet de transformer **une fonction en une autre fonction**. On a généralement à résoudre **des équations différentielles** qui établissent des relations entre **les signaux en entrée et les signaux en sortie**.



- $e(t)$ est le signal en entrée du système,
- $s(t)$ est le signal en sortie du système.

Exercice 3 : Appliquez les lois de l'électrocinétique pour trouver l'équation différentielle permettant de déduire $s(t)$ en fonction de $e(t)$.

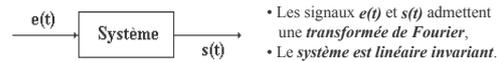
Pour simplifier le traitement mathématique, on travaille dans **l'espace euclidien « tangent »** à celui où le phénomène se déroule : on ne considère que **les systèmes linéaires**.

Systèmes linéaires invariants

Par exemple :

- un système électronique étudié **autour d'un point de fonctionnement** en « régime de petits signaux »,
- un système optique composé de lentilles **étudié à proximité de l'axe optique** (dans les conditions de Gauss).

De plus, on travaille avec **des systèmes caractérisés par leur réponse fréquentielle** : on ne considère que **les systèmes invariants**.



- Les signaux $e(t)$ et $s(t)$ admettent une **transformée de Fourier**,
- Le système est **linéaire invariant**.

Une **relation algébrique** est établie dans le **domaine fréquentiel** :

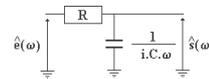
$$\hat{s}(\omega) = \hat{h}(\omega) \cdot \hat{e}(\omega)$$

- représentation fréquentielle de $e(t)$: $\hat{e}(\omega)$
- représentation fréquentielle de $s(t)$: $\hat{s}(\omega)$

$\hat{h}(\omega)$ est appelée fonction de **transfert du système** ($\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$).

Systèmes linéaires invariants

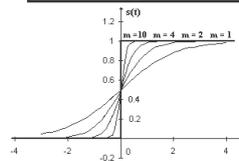
Exercice 4 : En utilisant le formalisme d'impédance complexe, trouvez la fonction de transfert du système.



Espace vectoriel des fonctions mesurables

Une fonction $s(t)$ **ne doit pas trop irrégulière**, elle doit être **mesurable** :

$s(t)$ est mesurable si elle est presque partout la **limite d'une suite de fonctions continues**.



On considère ici la suite de fonctions :

$$s_m(t) = \frac{1}{1 + \exp(-m \cdot t)}$$

La limite de la suite, lorsque n devient très grand, est la **fonction « échelon »**. On exclut alors le **point $t = 0$** .

Espace vectoriel des fonctions sommables

Les signaux usuels sont représentés par des fonctions mesurables qui ne soient pas « trop grandes ». Il faut que le signal $s(t)$ soit **sommable** :

$$\text{Une fonction } s(t) \text{ est } \textit{sommable} \text{ si on a : } \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)| dt < +\infty$$

Quelques propriétés des fonctions sommables :

Si s_0 et s_1 sont deux fonctions sommables et si λ est une constante, on a :

- $s_0 + s_1$: fonction sommable et $\int (s_0(t) + s_1(t)) dt = \int s_0(t) dt + \int s_1(t) dt$
- $\lambda \cdot s_0$: fonction sommable et $\int \lambda \cdot s_0(t) dt = \lambda \cdot \int s_0(t) dt$

L'ensemble des fonctions sommables est un **espace vectoriel** noté $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Intégrale de Fourier

On **reconstruit la fonction $s(t)$** lorsque $\hat{s}(\omega)$ appartient également à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$:

$$\text{Si } s(t) \text{ et } \hat{s}(\omega) \text{ appartiennent à } \mathcal{L}^1(\mathbb{R}), \text{ on a : } s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{s}(\omega) \cdot \exp(i \cdot \omega \cdot t) \cdot d\omega$$

Exercice 5 : Trouvez l'original de $\hat{s}(\omega) = \frac{2 \cdot a}{a^2 + \omega^2}$

Premières propriétés de la transformation de Fourier :

- Transformation d'une somme : $F[a_1 \cdot s_1(t) + a_2 \cdot s_2(t)] = a_1 \cdot \hat{s}_1(\omega) + a_2 \cdot \hat{s}_2(\omega)$
- Transformée du conjugué : $F[s^*(t)] = \hat{s}^*(-\omega)$
- Transformée d'une translation : $F[s(t-a)] = \hat{s}(\omega) \cdot \exp(-i \cdot \omega \cdot a)$
- Transformée d'une modulation : $F[\exp(i \cdot \xi \cdot t) \cdot s(t)] = \hat{s}(\omega - \xi)$
- Transformée d'une dilatation : $F[s(k \cdot t)] = \frac{1}{|k|} \cdot \hat{s}\left(\frac{\omega}{k}\right)$

Produit de convolution

Une **simple relation algébrique** permet l'étude d'un système linéaire invariant dans le domaine fréquentiel : $\hat{s}(\omega) = \hat{h}(\omega) \cdot \hat{e}(\omega)$. En prenant la transformée inverse, on définit **le produit de convolution** :

Le **produit de convolution** des fonctions $h(t)$ par $e(t)$ est $s(t)$, notée $h * e(t)$, telle que : $s(t) = h * e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau$. La **transformée de Fourier du produit de convolution** est : $F[h * e(t)] = \hat{h}(\omega) \cdot \hat{e}(\omega)$

Exercice 7 : Trouvez la réponse $s(t)$ du circuit de l'exemple 3 à un signal $e(t)$ quelconque.

Propriétés du produit de convolution :

- La transformée de Fourier d'un produit de fonctions est :

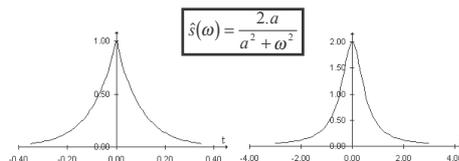
$$F[s_1(t) \cdot s_2(t)] = \frac{1}{2\pi} \cdot \hat{s}_1 * \hat{s}_2(\omega)$$

- Le produit de convolution est commutatif.
- La dérivée du produit de convolution est : $\frac{d(h * e(t))}{dt} = \frac{dh}{dt} * e = h * \frac{de}{dt}$

Intégrale de Fourier

L'intégrale de Fourier donnée par $\hat{s}(\omega) = F[s(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \exp(-i \cdot \omega \cdot t) \cdot dt$ mesure le nombre d'oscillations dans la fonction $s(t)$ à la pulsation ω . La fonction existe si $s(t)$ est **sommable** ($s(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$) et dans ce cas $\hat{s}(\omega)$ est **une fonction continue en ω** . Selon le théorème de Lebesgue, $\hat{s}(\omega)$ tend vers zéro pour ω tend vers $\pm\infty$.

Exemple : Transformée de Fourier de la fonction $s(t) = \exp(-a|t|)$ $a > 0$. En séparant l'intégrale en 2 parties ($t < 0$ et $t > 0$), on déduit que :



Intégrale de Fourier

Propriétés de la transformation de Fourier des fonctions réelles :

- Transformation d'une fonction réelle : $\hat{s}^*(-\omega) = \hat{s}(\omega)$
- Transformation d'une fonction réelle et paire : $\hat{s}(\omega)$ est une fonction à valeur réelle et paire
- Transformation d'une fonction réelle et impaire : $\hat{s}(\omega)$ est une fonction à valeur complexe imaginaire pur et impaire

Des propriétés se déduisent **l'une de l'autre** : les espaces des temps et des fréquences sont **duaux**, ils possèdent **des bases duales**.

Propriétés des opérations intégrales - différentielles :

- Dérivée n^{ème} par rapport au temps : $F\left[\frac{d^n s(t)}{dt^n}\right] = (i \cdot \omega)^n \cdot \hat{s}(\omega)$
- Dérivée n^{ème} par rapport à la pulsation : $\frac{d^n \hat{s}(\omega)}{d\omega^n} = (-i)^n \cdot F[t^n \cdot s(t)]$

Exercice 6 : Retrouvez le résultat de l'exercice 4 à partir du résultat de l'exercice 3.

Intégrale de Fourier sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

L'**inverse de la transformée de Fourier des fonctions** de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ n'existe pas toujours (**fonctions discontinues**).

➔ extension aux fonctions d'**énergie finie** $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$: $\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |s(x)|^2 \cdot dx} < +\infty$ (**fonctions de carré sommable**).

L'espace $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de Hilbert :

- **Le produit scalaire** : Si $s_0(t)$ et $s_1(t)$ sont deux fonctions, il est représenté par le scalaire : $s_0 \bullet s_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} s_0(t) \cdot s_1^*(t) \cdot dt$, $s_1^*(t)$ étant le complexe conjugué.
- **La norme** : Si $s_0(t)$ est une fonction, elle est représentée par le scalaire : $\|s_0\| = (s_0 \bullet s_0)^{1/2}$

Conservation d'énergie (Théorème de Plancherel - Parseval) :

Si $s_0(t)$ et $s_1(t)$ appartiennent à $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_0(t) \cdot s_1^*(t) \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{s}_0(\omega) \cdot \hat{s}_1^*(\omega) \cdot d\omega \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |s_0(t)|^2 \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{s}_0(\omega)|^2 \cdot d\omega$$

Intégrale de Fourier sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

La **transformée de Fourier sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$** se définit en appliquant **le théorème de Plancherel - Parseval** et en considérant que **$\mathcal{L}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$** :

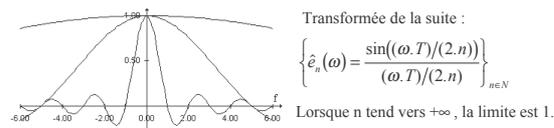
La transformation de Fourier, restreinte à l'espace $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, se prolonge en un endomorphisme de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$: $\hat{s}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \exp(-i \cdot \omega \cdot t) \cdot d\mathbb{F}$ elle définit une isométrie : $\int_{-\infty}^{+\infty} s_0(t) \cdot s_1^*(t) \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{s}_0(\omega) \cdot \hat{s}_1^*(\omega) \cdot d\omega$ éléments de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. La transformée de Fourier de tout élément de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ admet une transformation inverse ou conjuguée : $s(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{s}(\omega) \cdot \exp(i \cdot \omega \cdot t) \cdot d\omega$.

Exercice 8 : Calculez la transformation de Fourier de $\text{rect}(t/T)$

Impulsion de Dirac

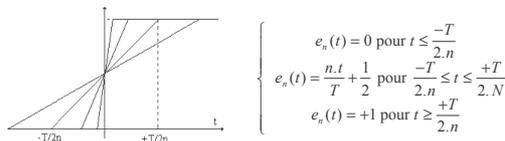
Transformée de Fourier de l'impulsion de Dirac :

↳ Transposition de la suite $e_n(t)$ dans le domaine fréquentiel :



La transformée de Fourier de la distribution de Dirac est : $F[\delta(t)] = 1$

Dérivée de la fonction d'Heaviside :



Impulsion de Dirac

Exercice 9 : Trouvez la transformation de Fourier de la fonction : $\cos(\omega_0 t)$

Transformation de Fourier à partir de la dérivée d'une fonction :

- L'intégration de l'équation différentielle : $\frac{ds}{dt} = \frac{ds_0}{dt}$ donne $s(t) = c + s_0(t)$
- Le calcul de la transformée de Fourier : $\hat{s}(\omega) = 2\pi \cdot \delta(\omega) \cdot c + \hat{s}_0(\omega)$

↳ $F[s(t)] = 2\pi \cdot \delta(\omega) + \frac{1}{i \cdot \omega} \cdot F\left[\frac{ds_0(t)}{dt}\right]$

Exemple : Fonction signe et fonction d'Heaviside.

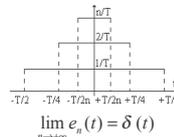
Relation entre la fonction échelon et signe : $u(t) = \frac{1}{2} + \frac{\text{sgn}(t)}{2}$

Comme : $\frac{du(t)}{dt} = \delta(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d \text{sgn}(t)}{dt}$, alors

↳ $F[\text{sgn}(t)] = \frac{2}{i \cdot \omega}$ et $F[u(t)] = \pi \cdot \delta(\omega) + \frac{1}{i \cdot \omega}$

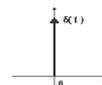
Impulsion de Dirac

La suite de fonctions $e_n(t) : \left\{ e_n(t) = \frac{n}{T} \cdot \text{rect}\left(\frac{n \cdot t}{T}\right) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ permet de définir l'impulsion de Dirac :



Pour toute valeur de n, la surface enfermée par la courbe représentative de la fonction rectangle garde **une valeur constante 1**. Lorsque n croît, la **base du rectangle diminue** tandis que **sa hauteur grandit**. La limite de cette suite n'est pas une fonction mais **la distribution de Dirac**.

Représentation graphique et notation mathématique :



Impulsion de Dirac de masse +1 :

- $\delta(0)$ n'étant pas définie ($+\infty$)
- $\delta(t) = 0$ pour $t \neq 0$

Impulsion de Dirac

Convergence de la suite vers la fonction « échelon » : $\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n(t) = u(t)$

↳ Dérivée de la suite $e_n(t) : \left\{ \frac{de_n(t)}{dt} = \frac{n}{T} \cdot \text{rect}\left(\frac{n \cdot t}{T}\right) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$, donc :

La dérivée de la fonction « échelon » est la distribution de Dirac : $\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$

Propriétés de la distribution de Dirac :

- $\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \delta(t - t_0) \cdot dt = s(t_0)$ $\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \delta(t) \cdot dt = s(0)$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot dt = 1$
- $s(t) \cdot \delta(t - t_0) = s(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$
- $\delta(a \cdot t) = \frac{1}{|a|} \cdot \delta(t)$

Propriétés avancées de la transformation de Fourier

Régularité et décroissance :

La **régularité globale d'un signal** $s(t)$ est caractérisée par l'existence de **ses dérivées successives**.

Une fonction $s(t)$ est bornée avec ses dérivées jusqu'à l'ordre p continues et bornées si : $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{s}(\omega)| \cdot (1 + |\omega|^p) \cdot d\omega < +\infty$

Lorsque ω croît, il existe K et ϵ suffisamment petit tel que $|\hat{s}(\omega)| \leq \frac{K}{1 + |\omega|^{p+\epsilon}}$ pour que l'intégrale converge.

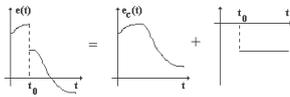
Exemple : Etude de la décroissance du signal porte.

Sa dérivée n'est pas définie **au sens des fonctions**, il décroît en $\frac{1}{|\omega|}$ pour ω grand.

Propriétés avancées de la transformation de Fourier

Oscillations de Gibbs :

Signal discontinu en t_0 : $e(t) = e_c(t) + (e(t_0^+) - e(t_0^-))u(t - t_0)$

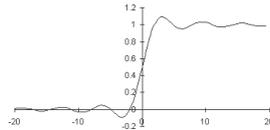


Filtrage de $e(t)$ par un filtre passe-bas : $\forall \omega \in [-\xi, +\xi], \hat{h}_\xi(\omega) = 1$ sinon 0

$$\hookrightarrow s(t) = h_\xi * e_c(t) + (e(t_0^+) - e(t_0^-))h_\xi * u(t - t_0)$$

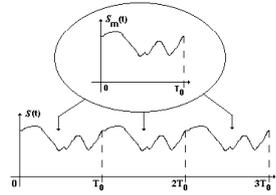
La fonction est une **sigmoïde** :

Pour tout $\xi > 0, h_\xi * u(t) = \int_{-\infty}^{\xi t} \frac{\sin(x)}{\pi \cdot x} \cdot dx$



Signaux périodiques

$$s(t + T_0) = s(t)$$



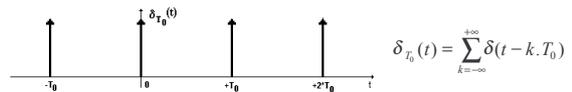
Expression de la fonction $s(t)$ en fonction du motif $s_m(t)$:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_m(t - k \cdot T_0)$$

Expression de $s(t)$ en utilisant la distribution de Dirac :

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_m(t) * \delta(t - k \cdot T_0)$$

Périodiser le signal de Dirac pour obtenir **le peigne de Dirac** :



Développement en série de Fourier d'un signal périodique

Base orthonormée de l'espace des fonctions périodiques :

$$\left\{ e_k(t) = \exp\left(i \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T_0} \cdot k \cdot t\right) \right\} \text{ forme une } \textit{base orthonormée} \text{ de l'espace vectoriel des fonctions périodiques.}$$

Formules de Poisson :

- Dans le domaine temporel : $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k \cdot T_0) = \frac{1}{T_0} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp\left(i \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T_0} \cdot k \cdot t\right)$
- Dans le domaine fréquentiel : $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp(-i \cdot \omega \cdot T_0 \cdot k) = \frac{2 \cdot \pi}{T_0} \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2 \cdot \pi \cdot k}{T_0}\right) \right]$

Transformation de Fourier d'un signal périodique :

En prenant la transformée de Fourier de : $s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_m(t) * \delta(t - k \cdot T_0)$

$$\hat{s}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2 \cdot \pi}{T_0} \cdot \hat{s}_m\left(\frac{2 \cdot \pi}{T_0} \cdot k\right) \delta\left(\omega - \frac{2 \cdot \pi}{T_0} \cdot k\right) \text{ Le spectre est échantillonné.}$$

Développement en série de Fourier d'un signal périodique

En posant : $c_k = \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} s(t) \cdot \exp\left(-i \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T_0} \cdot k \cdot t\right) \cdot dt$

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot \exp\left(i \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T_0} \cdot k \cdot t\right), \text{ en prenant la transformée inverse.}$$

Développement en série de Fourier d'une fonction réelle à variable réelle :

Dans le cas d'une fonction réelle, en posant $c_0 = \frac{a_0}{2}$ et $c_k = \frac{a_k - i \cdot b_k}{2}$:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T_0} \cdot k \cdot t\right) + b_k \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T_0} \cdot k \cdot t\right)$$

a_k et b_k étant les nombres réels :

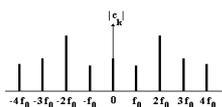
$$a_k = \frac{2}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} s(t) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T_0} \cdot k \cdot t\right) \cdot dt \text{ et } b_k = \frac{2}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} s(t) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T_0} \cdot k \cdot t\right) \cdot dt$$

Développement en série de Fourier d'un signal périodique

- Lorsque le signal est pair : $a_k = \frac{4}{T_0} \cdot \int_0^{T_0/2} s(t) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T_0} \cdot k \cdot t\right) \cdot dt$ et $b_k = 0$
- Lorsque le signal est impair : $a_k = 0$ et $b_k = \frac{4}{T_0} \cdot \int_0^{T_0/2} s(t) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T_0} \cdot k \cdot t\right) \cdot dt$

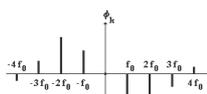
Exercice 10 : Trouvez le développement en série de Fourier du signal carré périodique impair en utilisant deux méthodes.

Spectre bilatéral :



Spectre d'amplitude bilatéral

$$|c_k^*| = |c_k|$$



Spectre de phase bilatéral

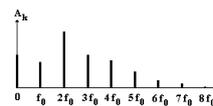
$$\text{Arg}(c_k^*) = -\text{Arg}(c_k)$$

Développement en série de Fourier d'un signal périodique

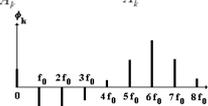
Spectre unilatéral :

$$s(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T_0} \cdot t - \Phi_1\right) + \sum_{k=2}^{+\infty} A_k \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T_0} \cdot k \cdot t - \Phi_k\right)$$

- l'amplitude définie par : $A_0 = a_0$ et $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$
- la phase définie par : $\cos(\Phi_k) = \frac{a_k}{A_k}$ et $\sin(\Phi_k) = \frac{b_k}{A_k}$



Spectre d'amplitude unilatéral



Spectre de phase unilatéral

- Le terme d'ordre 0 est appelé **composante continue** (valeur moyenne),
- Le terme d'ordre 1 est appelé **fondamental** (celui de fréquence $f_0 = 1/T_0$),
- Les termes d'ordre supérieur sont appelés **harmoniques** (ceux pour $k > 1$).

Puissance moyenne d'un signal périodique

Puissance d'un signal périodique : $P_s = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(t)^2 \cdot dt$

La puissance peut s'exprimer aussi en fonction des coefficients de Fourier en appliquant l'égalité de Bessel - Parseval :

- en fonction des coefficients c_k : $P_s = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2$
- en fonction des coefficients a_k et b_k : $P_s = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{2}$

Echantillonnage du signal

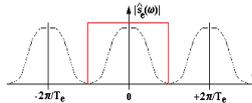
L'opération d'échantillonnage quantifie les valeurs du signal analogique $s(t)$ à intervalle régulier T_e .

Obtention une suite de nombres $\{s(n.T_e)\}_{n \in \mathbb{Z}}$. On représente un signal discret comme **une somme pondérée d'impulsions de Dirac** :

$$s_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k.T_e) \cdot \delta(t - k.T_e)$$

La transformée de Fourier du signal $s_e(t)$ est **une série de Fourier** :

$$\hat{s}_e(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k.T_e) \cdot \exp(-i.\omega.k.T_e)$$



En utilisant les formules de Poisson, on déduit une autre expression :

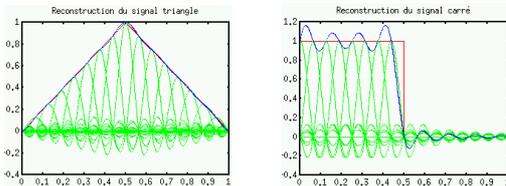
$$\hat{s}_e(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_e} \cdot \hat{s}\left(\omega - \frac{2.\pi}{T_e} \cdot k\right)$$

Reconstruction dans les conditions de Shannon

Lorsque la transformée de Fourier de $s(t)$ a un support compris entre $-\pi/T_e$ et π/T_e pour reconstruire $s(t)$, on applique **un filtre passe-bas** sur le spectre du signal échantillonné : $\hat{h}(\omega) = T_e \cdot \text{rect}(\omega T_e) / (2.\pi)$

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k.T_e) \cdot h_{r_i}\left(\frac{t}{T_e} - k\right) \text{ avec } h_{r_i}(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_e}\right)$$

Le système $\left\{h_{r_i}\left(\frac{t}{T_e} - k\right)\right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée.



Transformation de Fourier numérique

Pour utiliser **un ordinateur**, il est nécessaire que **le signal** et **son spectre** soient **échantillonnés et numérisés**.

Considérons un signal de période $N.T_e$: $s(t) = s_m(t) * \sum_{q \in \mathbb{Z}} \delta(t - q.N.T_e)$

$s_m(t)$ étant **le motif** comportant N échantillons équi-distants de T_e .

$$\hat{s}(\omega) = \frac{2.\pi}{N.T_e} \sum_{q \in \mathbb{Z}} \hat{s}_m\left(\frac{2.\pi}{N.T_e} \cdot q\right) \cdot \delta\left(\omega - \frac{2.\pi}{N.T_e} \cdot q\right)$$

Le spectre est échantillonné avec une cadence $2.\pi/N.T_e$

La transformée de Fourier du motif $s_m(t) = \sum_{p=0}^{N-1} s(p) \cdot \delta(t - p.T_e)$ est :

$$\hat{s}_m(\omega) = \sum_{p=0}^{N-1} s(p) \cdot \exp(-i.p.T_e.\omega)$$

$$\hat{s}(\omega) = \frac{2.\pi}{N.T_e} \sum_{q \in \mathbb{Z}} \left[\sum_{p=0}^{N-1} s(p) \cdot \exp\left(-i.\frac{2.\pi}{N} \cdot p \cdot q\right) \right] \cdot \delta\left(\omega - \frac{2.\pi}{N.T_e} \cdot q\right)$$

Transformation de Fourier numérique

Transformée de Fourier numérique :

$$\hat{s}(q) = \sum_{p=0}^{N-1} s(p) \cdot \exp\left(-i.\frac{2.\pi}{N} \cdot p \cdot q\right)$$

Transformation inverse :

$$s(p) = \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} \hat{s}(q) \cdot \exp\left(i.\frac{2.\pi}{N} \cdot p \cdot q\right)$$

Principales propriétés :

- **Translation** : $NF[s(p - p_0)] = \hat{s}(q) \cdot \exp\left(-i.\frac{2.\pi}{N} \cdot p_0 \cdot q\right)$
- **Symétrie (série à coefficients réels)** : $\hat{s}^*(N - q) = \hat{s}(q)$
- **Convolution circulaire** : $NF\left[\sum_{k=0}^{N-1} s_0(k) \cdot s_1(p - k)\right] = \hat{s}_0(q) \cdot \hat{s}_1(q)$
- **Formule de Planchet - Parseval** : $NF\left[\sum_{p=0}^{N-1} s_0(p) \cdot s_1^*(p)\right] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{q=0}^{N-1} \hat{s}_0(q) \cdot \hat{s}_1^*(q)$

Transformation rapide de Fourier

Le calcul des N coefficients de la transformée de Fourier numérique d'un signal comportant N échantillons nécessite N^2 **multiplications complexes**.

Si N est une puissance de 2 ($N = 2^n$), on utilise **une méthode de dichotomie** :

$$\hat{s}(2q) = \sum_{p=0}^{N/2-1} \left[s(p) + s\left(p + \frac{N}{2}\right) \right] \exp\left(-i.\frac{2.\pi}{N} \cdot p \cdot q\right)$$

On calcule :

$$\hat{s}(2q+1) = \sum_{p=0}^{N/2-1} \left[s(p) - s\left(p + \frac{N}{2}\right) \right] \exp\left(-i.\frac{2.\pi}{N} \cdot p \cdot q\right) \cdot \exp\left(-i.\frac{2.\pi}{N} \cdot p \cdot q\right)$$

Les **coefficients pairs et impairs** s'obtiennent en prenant la transformée de Fourier de signaux $N/2$ **périodiques**.

L'algorithme remplace les **échantillons en mémoire** :

$$s(p) \longrightarrow s(p) + s\left(p + \frac{N}{2}\right)$$

$$s\left(p + \frac{N}{2}\right) \longrightarrow \left[s(p) - s\left(p + \frac{N}{2}\right) \right] \exp\left(-i.\frac{2.\pi}{N} \cdot p \cdot q\right)$$

Cette opération appelée "**papillon**" est répétée $\log_2(N)$ pour obtenir le résultat.

Transformation rapide de Fourier

- Alors :
- Le nombre d'additions est $N \cdot \log_2(N)$,
 - Le nombre de multiplications à $N/2 \cdot \log_2(N)$.

En fin de calcul, les coefficients de Fourier *ne sont pas rangés dans l'ordre habituel*. On effectue une permutation en utilisant une inversion binaire (*décomposition de l'indice en base 2 puis écriture inversée de l'ordre des bits*).

Exemple : transformation numérique pour $N=4$

$$\begin{cases} s_p(0) = s(0) + s(2) \\ s_p(1) = s(0) - s(2) \\ s_p(2) = s(1) + s(3) \\ s_p(3) = s(1) - s(3) \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{s}(0) = s_p(0) + s_p(1) \\ \hat{s}(2) = s_p(0) - s_p(1) \\ \hat{s}(1) = s_p(2) + s_p(3) \\ \hat{s}(3) = s_p(2) - s_p(3) \end{cases}$$

Papillon d'ordre 0 *Papillon d'ordre 1*

Transformation de Fourier bidimensionnelle

Définitions et propriétés :

La transformation de Fourier d'une fonction intégrable $s \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$ à deux variables est définie par : $\hat{s}(\omega_1, \omega_2) = \iint_{\mathbb{R}^2} s(x_1, x_2) \cdot \exp(-i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)) \cdot dx_1 \cdot dx_2$

Lorsque la fonction $s(x_1, x_2)$ est à **variables séparables** $s(x_1, x_2) = s_1(x_1) \cdot s_2(x_2)$
 $\hat{s}(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(x_1) \cdot \exp(-i \cdot \omega_1 \cdot x_1) \cdot dx_1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} s_2(x_2) \cdot \exp(-i \cdot \omega_2 \cdot x_2) \cdot dx_2 = \hat{s}_1(\omega_1) \cdot \hat{s}_2(\omega_2)$

Si $s \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$ et $\hat{s} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$, la transformation de Fourier inverse est définie par : $s(x_1, x_2) = \frac{1}{4 \cdot \pi^2} \iint_{\mathbb{R}^2} \hat{s}(\omega_1, \omega_2) \cdot \exp(i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)) \cdot d\omega_1 \cdot d\omega_2$

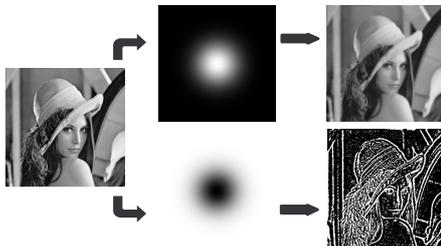
Extension du formalisme de Fourier dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$:

La transformée de Fourier définit une **isométrie**, si s_0 et s_1 sont deux éléments de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$: $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s_0(x_1, x_2) \cdot s_1^*(x_1, x_2) \cdot dx_1 \cdot dx_2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{s}_0(\omega_1, \omega_2) \cdot \hat{s}_1^*(\omega_1, \omega_2) \cdot d\omega_1 \cdot d\omega_2$

Filtrage d'images

L'application d'une méthode de filtrage linéaire, non linéaire ou autre, nécessite l'*étude statistique du signal*. Bien que le signal soit de nature très "transitoire", on choisit un **modèle stationnaire** permettant des décompositions **bien localisées** (voir les ondelettes).

Un opérateur linéaire h est stationnaire sur une image e , lorsque $\hat{s}(\omega_1, \omega_2) = \hat{h}(\omega_1, \omega_2) \cdot \hat{e}(\omega_1, \omega_2)$



Echantillonnage en dimension deux

Une caméra vidéo mesure l'intensité lumineuse sur une grille rectangulaire d'éléments dénommés « pixels ». Une **somme pondérée d'impulsions de Dirac** représente l'image : $s_e(x_1, x_2) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} s(k \cdot T_1, l \cdot T_2) \cdot \delta(x_1 - k \cdot T_1) \cdot \delta(x_2 - l \cdot T_2)$

La **transformée de Fourier** de l'image numérisée est aussi **périodique** :

$$\hat{s}_e(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{T_1 \cdot T_2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{s} \left(\omega_1 - \frac{2 \cdot \pi}{T_1} k, \omega_2 - \frac{2 \cdot \pi}{T_2} l \right)$$

Si l'image numérisée possède une transformée de Fourier \hat{s} à support dans

$$\left[-\frac{\pi}{T_1}, +\frac{\pi}{T_1} \right] \times \left[-\frac{\pi}{T_2}, +\frac{\pi}{T_2} \right], \text{ alors en posant } h_T(t) = \sin c \left(\frac{t}{T} \right) \text{ on obtient :}$$

$$s_e(x_1, x_2) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} s(k \cdot T_1, l \cdot T_2) \cdot h_{T_1}(x_1 - k \cdot T_1) \cdot h_{T_2}(x_2 - l \cdot T_2)$$

Transformée de Fourier numérique bidimensionnelle

Pour obtenir à la fois une **information bidimensionnelle échantillonnée** dans le **domaine spatial et fréquentiel**, il faut considérer que l'image s'étend par périodicité **le long des lignes et des colonnes**.

Les définitions de la transformation numérique directe et inverse de Fourier sont :

$$\begin{aligned} \hat{s}(m, n) &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} s(k, l) \cdot \exp \left(-i \cdot \frac{2 \cdot \pi}{N} (k \cdot m + l \cdot n) \right) \\ s(k, l) &= \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{s}(m, n) \cdot \exp \left(i \cdot \frac{2 \cdot \pi}{N} (k \cdot m + l \cdot n) \right) \end{aligned}$$

Remarques :

- Le calcul s'effectue selon **les lignes** puis selon **les colonnes**.
- Il est possible d'appliquer l'algorithme de calcul rapide en prenant des images dont les dimensions sont **des puissances de deux**.

Localisation temps - fréquence

- Un **bon échantillonnage temporel** demande une **bonne localisation fréquentielle**,
- Un **bon échantillonnage fréquentiel** demande une **bonne localisation temporelle**.

L'amélioration de la localisation temporelle à énergie constante s'effectue par un

changement d'échelle : $s_a(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot s \left(\frac{t}{a} \right)$ avec $a < 1$.

$$\Rightarrow \hat{s}_a(\omega) = \sqrt{a} \cdot \hat{s}(a \cdot \omega), \text{ dilatation en fréquence.}$$

Principe d'Heisenberg :

La **variance temporelle** et la **variance fréquentielle** de $s \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ satisfont à

$$\sigma_t^2 \cdot \sigma_\omega^2 \geq \frac{1}{4} \text{ avec } \sigma_t^2 = \frac{1}{\|s\|^2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (t-u)^2 \cdot |s(t)|^2 \cdot dt, u = \frac{1}{\|s\|^2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot |s(t)|^2 \cdot dt$$

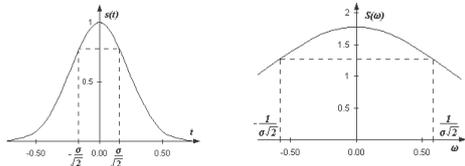
$$\text{et } \sigma_\omega^2 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \|s\|^2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \xi)^2 \cdot |s(\omega)|^2 \cdot d\omega, \xi = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \|s\|^2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \cdot |s(\omega)|^2 \cdot d\omega$$

Localisation temps - fréquence

Exemple : fonction gaussienne

Fonction gaussienne normalisée et centrée : $s(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$

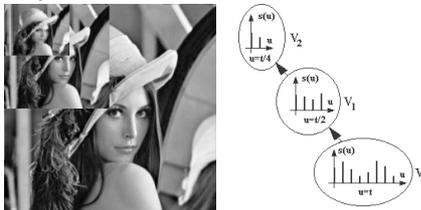
Transformée de Fourier de la gaussienne : $\hat{s}(\omega) = \sqrt{\pi} \cdot \exp\left(-\frac{\sigma^2 \cdot \omega^2}{2}\right)$



Lorsque l'on regarde les largeurs des gaussiennes pour une atténuation -3db, on remarque qu'elles sont **inversement proportionnelles** : en réduisant l'étalement temporel, on augmente l'étalement fréquentiel.

Analyse multirésolution

L'analyse multirésolution représente un signal dont la résolution est **successivement divisée par deux**. Au passage, on en garde les détails, ce qui permet de reconstruire le signal à une résolution supérieure **sans perte d'information**.



A la résolution 2^j , les échantillons sont la **moyenne locale du signal** sur des voisinages de **taille proportionnelle à 2^j** que l'on appelle échelle. La décomposition et la reconstruction s'effectuent au moyen d'un système de **filtres en cascade**.

Analyse multirésolution

Définition de l'analyse multirésolution (remplaçant t/T_e par la variable réduite t) :

- Une suite $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ de sous-espaces fermés de $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ est une approximation multirésolution si elle vérifie :
- $\forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2, s(t) \in V_j \Leftrightarrow s(t - 2^j \cdot k) \in V_j$ (invariance par translation proportionnelle à 2^j)
 - $\forall j \in \mathbb{Z}, V_{j+1} \subset V_j$ (propriété de causalité)
 - $\forall j \in \mathbb{Z}, s(t) \in V_j \Leftrightarrow s\left(\frac{t}{2}\right) \in V_{j+1}$ (dilatation d'échelle par 2, résolution divisée par 2)
 - $\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}$ (perte de tous les détails, grossissement à l'extrême)
 - $\lim_{j \rightarrow \infty} V_j = \text{Adhérence} \left(\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j \right) = \mathcal{L}(\mathbb{R})$ (convergence vers le signal)
 - Il existe θ tel que $\{\theta(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ soit une base de Riesz de V_0

Une famille de vecteur $\{\theta(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est appelée base de Riesz si elle est linéairement indépendante et s'il existe $A > 0$ et $B > 0$ tels que $A \cdot \|s\|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a[n]|^2 \leq B \cdot \|s\|^2$

Fonctions échelles et ondelettes

Introduction de la **fonction échelle** $\phi(t)$ construite à partir de **filtres engendrant une analyse multirésolution**.

$$\left\{ \phi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \cdot \phi\left(\frac{t}{2^j} - k\right) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$$
 est une base orthonormée de V_j

• **Sous-espace W_j** supplémentaire orthogonal de V_j dans V_{j+1} : $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$

Introduction de la **fonction ondelette** $\psi(t)$ construite à partir de la fonction $\phi(t)$

$$\left\{ \psi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \cdot \psi\left(\frac{t}{2^j} - k\right) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$$
 forme une base orthonormée de W_j

En projetant le signal $s(t)$ sur la base $\{\phi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ on obtient sa **représentation à la résolution 2^j** et en projetant le signal $s(t)$ sur la base $\{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ on extrait les **détails du signal perdus** en passant d'une résolution à une autre.

En diminuant la résolution à l'extrême, toute l'information est recueillie dans les sous-espaces orthogonaux $\{W_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$. La reconstruction du signal est faite à partir des coefficients calculés sur les bases d'ondelettes. Ainsi $\{\psi_{j,k}\}_{(j,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ forme une **base "hibertienne" de $\mathcal{L}(\mathbb{R})$** .

Filtres associés aux bases d'ondelettes orthogonales

Des bases orthogonales d'ondelettes sont construites en utilisant **des filtres conjugués en quadrature** (CQF). Les seuls connus sont ceux qui sont associés aux **analyses multirésolutions de $\mathcal{L}(\mathbb{R})$** .

Filtres conjugués en quadrature :

- Soit $\hat{h}(\omega)$ une fonction C^∞ et 2π périodique vérifiant :
1. $\forall \omega \in \mathbb{R}, |\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{h}(\omega + \pi)|^2 = 2$ et $\hat{h}(0) = \sqrt{2}$
 2. $\hat{h}(\omega)$ ne s'annule pas sur l'intervalle $[-\pi/2, +\pi/2]$.

Alors :

1. ce filtre engendre une **multirésolution localisée**,
2. $\hat{\phi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\hat{h}(2^{-j} \cdot \omega)}{\sqrt{2}}$ est la **transformée de Fourier d'une fonction échelle** $\phi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Réciproquement, les filtres conjugués en quadrature issus des analyses multirésolution localisées satisfont à toutes les hypothèses formulées ci-dessus

Filtres associés aux bases d'ondelettes orthogonales

• Le filtre $\hat{h}(\omega)$ est 2π périodique : $\hat{h}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \cdot \exp(-i \cdot k \cdot \omega)$

$$\text{avec } h_k = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \hat{h}(\omega) \cdot \exp(i \cdot k \cdot \omega) \cdot d\omega$$

• Comme $\hat{\phi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\hat{h}(2^{-j} \cdot \omega)}{\sqrt{2}}$, on déduit que $\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \phi\left(\frac{\omega}{2}\right)$

$$\text{Alors : } \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \phi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \cdot \phi(t - k) \text{ et } \left\{ \phi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \cdot \phi\left(\frac{t}{2^j} - k\right) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

Autres filtres conjugués en quadrature générant des analyses multirésolutions :

- les filtres possédant une **réponse impulsionnelle finie**,
- les filtres vérifiant la condition : $\forall \omega \in \left[-\frac{\pi}{3}, +\frac{\pi}{3}\right], \hat{h}(\omega) \neq 0$

Ondelettes orthogonales

Pour reconstruire le signal $s(t)$ à partir de résolutions inférieures, on doit trouver l'ondelette $\psi(t)$ à partir de laquelle on bâtit la base orthogonale de chaque sous-espace W_j :

Soient $\hat{h}(\omega)$ un filtre miroir conjugué engendrant une analyse multirésolution et $\phi(t)$ la fonction échelle associée. Soit $\psi(t)$ la fonction dont la transformée de Fourier vaut $\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$ avec $\hat{g}(\omega) = \exp(-i \cdot \omega) \hat{h}^*(\omega + \pi)$

Alors pour toute échelle 2^j $\left\{ \psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \cdot \psi\left(\frac{t}{2^j} - k\right) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$

une base orthonormée de W_j . Sur l'ensemble des échelles, $\left\{ \psi_{j,k}(t) \right\}_{(j,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

- le filtre $\hat{g}(\omega)$ est $2 \cdot \pi$ périodique : $\hat{g}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \cdot \exp(-i \cdot k \cdot \omega)$
 - Comme nous avons la relation : $\hat{\psi}(2 \cdot \omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \hat{g}(\omega) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$
- Alors : $\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \cdot \psi\left(\frac{t}{2^j} - k\right) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_l \cdot \phi(t - k - 2^j l) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^{-l} \cdot h_{1-l} \cdot \phi(t - k - 2^j l)$

Transformée en ondelettes

Décomposition du signal sur les bases d'échelles et d'ondelettes :

Pour déterminer les coefficients $a_j[k]$ d'un signal $s(t)$ à une échelle 2^j , nous devons le projeter sur le sous-espace vectoriel V_j : $s(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_j[k] \cdot \phi_{j,k}(t)$

La série de Fourier associée à la suite des coefficients $a_j[k] \left\langle s(t), \phi_{j,k}(t) \right\rangle$ est donnée par l'expression : $\hat{a}_j(\omega) = \sqrt{2^j} \cdot \hat{s}(2^{-j} \cdot \omega) \hat{\phi}^*(\omega)$ (période 2^{j+1})

La projection d'un signal $s(t)$ à une échelle 2^j sur le sous-espace supplémentaire orthogonal W_j donne les coefficients en ondelettes $d_j[k]$: $d_j[k] \left\langle s(t), \psi_{j,k}(t) \right\rangle$

La série de Fourier associée est : $\hat{d}_j(\omega) = \sqrt{2^j} \cdot \hat{s}(2^{-j} \cdot \omega) \hat{\psi}^*(\omega)$

Décomposition et reconstruction du signal dans le domaine de Fourier :

En utilisant la propriété : $\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$ on calcule les relations

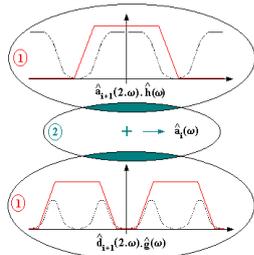
liant les coefficients à deux échelles successives : $\hat{a}_{j+1}(\omega) = \hat{h}^*\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{a}_j\left(\frac{\omega}{2}\right)$ et $\hat{d}_{j+1}(\omega) = \hat{g}^*\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{d}_j\left(\frac{\omega}{2}\right)$

Transformée en ondelettes

En considérant les deux relations $\hat{h}(\omega) \hat{h}^*(\omega + \pi) + \hat{g}(\omega) \hat{g}^*(\omega + \pi) = 0$ et $|\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{g}(\omega)|^2 = 2$, on en déduit la propriété :

Dans le domaine fréquentiel, la reconstruction du signal $s(t)$ à l'échelle 2^j s'exprime à partir des séries de Fourier à l'échelle 2^{j+1} :

- $\hat{a}_j(\omega) = \hat{h}(\omega) \hat{a}_{j+1}(2 \cdot \omega) + \hat{g}(\omega) \hat{d}_{j+1}(2 \cdot \omega)$

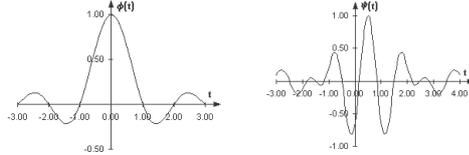


Ondelettes orthogonales

Exemples : Ondelettes de Shannon

En utilisant la fonction échelle $\phi(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} = \text{sinc}(t)$, on reconstruit le signal $s(t)$ à partir du système de fonctions $\left\{ \phi_k(t) = \text{sinc}(t - k) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ qui forme une base orthonormée.

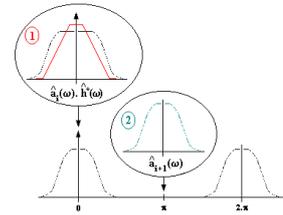
- de $\hat{\phi}(2 \cdot \omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}(\omega) \hat{\phi}(\omega)$, on déduit : $\forall \omega \in [-\pi, +\pi], \hat{h}(\omega) = \sqrt{2} \cdot \text{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right)$
- de $\hat{g}(\omega) = \exp(-i \cdot \omega) \hat{h}^*(\omega + \pi)$, on calcule $\begin{cases} \sqrt{2} \cdot \exp(-i \cdot \omega) & \text{pour } \omega \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{pour } \omega \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \end{cases}$
- de $\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$ on trouve : $\psi(t) = 2 \cdot \text{sinc}(2 \cdot (t - 1/2)) - \text{sinc}(t - 1/2)$



Transformée en ondelettes

Dans le domaine fréquentiel, la décomposition du signal $s(t)$ à l'échelle 2^{j+1} s'exprime à partir de sa décomposition à l'échelle 2^j à par les deux séries :

- $\hat{a}_{j+1}(2 \cdot \omega) = \frac{\hat{h}^*(\omega) \hat{a}_j(\omega) + \hat{h}^*(\omega + \pi) \hat{a}_j(\omega + \pi)}{2}$
- $\hat{d}_{j+1}(2 \cdot \omega) = \frac{\hat{g}^*(\omega) \hat{a}_j(\omega) + \hat{g}^*(\omega + \pi) \hat{a}_j(\omega + \pi)}{2}$



Transformée en ondelettes

Transformée en ondelettes rapides (Algorithme de Mallat) :

En considérant la transformée de Fourier inverse des relations liant les coefficients à deux échelles successives, on déduit les produits de convolutions :

- $a_{j+1}[k] = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h[l - 2 \cdot k] \cdot a_j[l] = a_j * h[2 \cdot k]$
- $d_{j+1}[k] = \sum_{l \in \mathbb{Z}} g[l - 2 \cdot k] \cdot a_j[l] = a_j * g[2 \cdot k]$

On calcule les coefficients de la décomposition d'un signal par l'algorithme rapide :

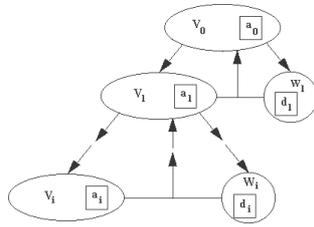
- convolution des a_j d'un signal avec la réponse impulsionnelle du filtre passe-bas $\bar{h}[l] = h[-l]$ et la réponse impulsionnelle du filtre passe-haut $\bar{g}[l] = g[-l]$
- sous-échantillonnage du signal de sortie d'un facteur deux (baisse la résolution)

On a : $a_j[k] = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h[k - 2 \cdot l] \cdot a_{j+1}[l] + g[k - 2 \cdot l] \cdot d_{j+1}[l] = \bar{a}_{j+1} * h[k] + \bar{d}_{j+1} * g[k]$

pour la reconstruction. L'algorithme rapide effectue les opérations suivantes :

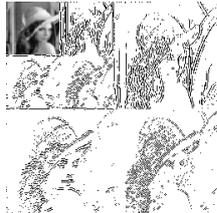
- sur-échantillonnage par insertion de zéros
- la convolution de \bar{a}_{j+1} et \bar{d}_{j+1} avec la réponse impulsionnelle du filtre passe-bas $h[l]$ et un filtre passe-haut $g[l]$.

Transformée en ondelettes



Principe de décomposition et de reconstruction

Décomposition de la figure emblématique de Léna



Construction d'ondelettes orthogonales

Moments nuls :

Lorsque qu'un signal est p fois différentiable en un point t_0 , on peut l'approximer en utilisant la **formule de Taylor**. Dans un voisinage de t_0 , $s(t) = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{s^{(n)}(t_0)}{n!} \cdot (t-t_0)^n + \varepsilon_{i0}(t)$. Cette propriété peut se vérifier sur des intervalles de temps et p est d'autant plus grand que le signal est régulier.

Les coefficients en ondelettes s'obtiennent par projection du signal sur les espaces complémentaires $W_j : d_j[k] = \langle s(t), \psi_{j,k}(t) \rangle$

La capacité à obtenir des coefficients d'ondelettes nuls dépend du nombre de moments nuls des ondelettes et de l'ordre de différentiabilité du signal $s(t)$.

Soient ϕ une fonction échelle et ψ une ondelette qui génèrent une base orthogonale. On suppose que leur module est inférieure à $(1+t^2)^{-p/2-1}$. Les quatre propositions suivantes sont équivalentes :

- l'ondelette ψ possède p moments nuls,
- $\hat{\psi}(\omega)$ et ses $p-1$ premières dérivées sont nulles en $\omega=0$,
- $\hat{h}(\omega)$ et ses $p-1$ premières dérivées sont nulles en $\omega=\pi$
- pour tout $0 \leq k < p$, $q_k(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^k \cdot \phi(t-n)$ est un polynôme de degré k .

Construction d'ondelettes orthogonales

Taille du support :

Le support d'une fonction est l'intervalle pour lequel elle est non nulle. Lorsqu'un signal présente au moins une singularité, les coefficients d'ondelettes peuvent être de grande amplitude. Si l'on diminue la taille du support, on minimise le nombre de grands coefficients d'ondelettes.

La fonction d'échelle ϕ est à support compact si et seulement si h est à support compact, et leurs supports sont identiques. Si le support de h et ϕ est $[n_1, n_2]$ alors le support de ψ est $[(n_1-n_2+1)/2, (n_2-n_1+1)/2]$.

Régularité :

Définition de la régularité lipschitzienne :

Un signal $s(t)$ est ponctuellement Lipschitz $\alpha > 0$ en t_0 s'il existe K et un polynôme p de degré m qui est le plus grand entier inférieur à α tels que : $\forall t \in R, |s(t) - p(t)| \leq K \cdot |t - t_0|^\alpha$
 Un signal $s(t)$ est uniformément Lipschitz α sur $[a, b]$ si elle est ponctuellement α sur tout l'intervalle.

Construction d'ondelettes orthogonales

La reconstruction du signal donne de bien meilleurs résultats avec des ondelettes continûment différentiables.

Soit $\hat{h}(\omega)$ un filtre conjugué en quadrature engendrant une analyse multirésolution ayant p zéros en π . On effectue la factorisation : $\hat{h}(\omega) = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1 + \exp(-i\omega)}{2} \right)^p \cdot \hat{R}(\omega)$
 Si $B = \sup_{\omega \in R} |\hat{R}(\omega)| \phi$ et ψ sont uniformément lipschitziennes $\alpha < p - \log_2(B) - 1$

Ondelettes de Daubechies :

Construction d'un filtre causal ne possédant qu'un nombre fini d'échantillons $h = (h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. La série de Fourier associée est : $\hat{h}(z) = \sum_{k=0}^{p-1} h_k z^k$ avec $z = \exp(i\omega)$

• $\hat{h}(z) = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1+z^{-1}}{2} \right)^p \cdot \hat{R}(z^{-1})$ avec $\hat{R}(z^{-1}) = R_0 \cdot \prod_{k=1}^m (1 - a_k \cdot z^{-1})$
 • $|\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{h}(\omega + \pi)|^2 = 2$ donne $(1-y)^p \cdot P(y) + y^p \cdot P(1-y) = 1$, $y = \sin^2(\frac{\omega}{2})$
 $P(y) = R(z^{-1}) \cdot R^*(z^{-1}) = R(z^{-1}) \cdot R(z)$, polynôme en $\cos(\omega)$ ou en $\sin^2(\omega/2)$.

Construction d'ondelettes orthogonales

Selon l'identité de Bezout : $P(y) = \sum_{k=0}^{p-1} C_{p-1+k}^k y^k, C_{p-1+k}^k = \frac{(p-1+k)!}{k! \cdot (p-1)!}$

P étant de degré $p-1$, on déduit que R l'est aussi. P ayant des couples de racines $(c_k, 1/c_k)$, les ondelettes de Daubechies sont construites en choisissant pour a_k l'une des deux valeurs telles que $|a_k| \leq 1$.

Les filtres de Daubechies ont exactement $2p$ coefficients non nuls. L'ondelette associée a un support de taille minimale égale à $[-p+1, p]$ et le support de la fonction d'échelle correspondante est $[0, 2p-1]$.

Exemple : Ondelettes orthogonales de Daubechies d'ordre 2

Le filtre possède un zéro d'ordre 2 en π : $\hat{h}(z^{-1}) = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1+z^{-1}}{2} \right)^2 \cdot R(z^{-1})$
 avec $R(z^{-1}) = R_0 \cdot (1 - a_1 \cdot z^{-1})$. On a : $(1-y)^2 \cdot P(y) + y^2 \cdot P(1-y) = 1$
 d'où $P(y) = 1 + 2 \cdot y$. Comme $y = \frac{2 - (z+z^{-1})}{4}$, $P(z) = -\frac{z^{-1}}{2} \cdot [z^2 - 4z + 1]$
 On obtient deux racines : $c_k = 2 \pm \sqrt{3}$, $R(z^{-1}) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} \cdot [1 - z^{-1}(2-\sqrt{3})]$
 $\hat{h}(z) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4} \cdot [1 + \sqrt{3} \cdot z^{-1} + \sqrt{3} \cdot (2-\sqrt{3}) \cdot z^{-2} - (2-\sqrt{3}) \cdot z^{-3}]$